NON-UNICITÉ DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS QUASI-HOMOGENÈS

KHALGUI-OUNAÏES HELLA

Reçu le 19 juin 2000

Nous démontrons que si P est un opérateur différentiel quasi-homogène d'ordre m sur une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^n$, à coefficients de classe C^∞ , tel que la m -partie principale est à coefficients réels ; et que $x_0 \in \Omega$, $S = \{x \in \Omega : \phi(x) = \phi(x_0)\}$ est une hypersurface non caractéristique en x_0 et strictement non pseudoconvexe avec $\{\{p_m, \phi\}, \phi\}(x_0, \xi_0) \neq 0$ et $d_q p_m(x_0, \xi_0) \neq 0$, alors P n'a pas l'unicité de Cauchy par rapport à S .

Classification 2000 des Sujets Mathématiques: 35A07.

1. Introduction. Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et S une hypersurface de Ω , passant par un point x_0 , définie par

$$S = \{x \in \Omega : \phi(x) - \phi(x_0) = 0\}, \quad (1.1)$$

où ϕ est une fonction réelle de classe C^∞ vérifiant $d\phi(x_0) \neq 0$.

DÉFINITION 1.1. Soit P un opérateur différentiel défini sur Ω , on dit que P n'a pas l'unicité de Cauchy par rapport à S s'il existe un voisinage V de x_0 dans Ω , des fonctions a et $u \neq 0$, de classe C^∞ sur V tel que $\text{supp } a \subset \{x \in \Omega : \phi(x) \leq \phi(x_0)\}$,

$$\begin{aligned} V \cap \text{supp } u &= \{x \in \Omega : \phi(x) \leq \phi(x_0)\} \cap V, \\ Pu + au &= 0 \quad \text{dans } V. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Alinhac [1] a donné des résultats de non-unicité pour des opérateurs du type

$$p(x, t, \sigma^q \xi, \sigma \tau) = \sigma^m p_m(x, t, \xi, \tau) + \sigma^{m-k} p_{m-k}(x, t, \xi, \tau) + \cdots, \quad (1.3)$$

où $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$.

Dans ce papier, nous donnons des conditions suffisantes de non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs différentiels quasi-homogènes, réels, à coefficients de classe C^∞ .

Les techniques utilisées dans ce travail sont rattachées aux constructions de l'optique géométrique qui sont développées dans les travaux de Plis [4], Hörmander [2] et Alinhac [1].

2. Notation et définitions. Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et soit $(x, \xi) \in T^*(\Omega)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Soit $m = (m_1, \dots, m_n)$ un multi-indice tel que

$$0 < m_1 \leq \dots \leq m_{q-1} < m_q = \dots = m_n, \quad (2.1)$$

et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

On note

$$|\alpha : m| = \alpha_1 m_1^{-1} + \alpha_2 m_2^{-1} + \dots + \alpha_n m_n^{-1},$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} \quad \text{avec } D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \nabla_q = \left(0, \dots, 0, \frac{\partial}{\partial x_q}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right). \quad (2.2)$$

DÉFINITION 2.1. On dit que P est un opérateur différentiel quasi-homogène d'ordre m sur Ω si

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha : m| \leq 1} a_\alpha(x) D^\alpha. \quad (2.3)$$

La m -partie principale de P est l'opérateur

$$P_m(x, D) = \sum_{|\alpha : m| = 1} a_\alpha(x) D^\alpha. \quad (2.4)$$

DÉFINITION 2.2. Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ sur $T^*\Omega$. On désigne par $\{f, g\}$ le crochet de Poisson quasi-homogène de f, g défini par

$$\{f, g\} = \sum_{j=q}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \right). \quad (2.5)$$

DÉFINITION 2.3. Soit $x_0 \in \Omega$ et ϕ une fonction de classe C^∞ dans Ω telle que $\nabla_q \phi(x_0) \neq 0$. L'hypersurface $S = \{x \in \Omega : \phi(x) = \phi(x_0)\}$ est dite strictement non pseudoconvexe au sens quasi-homogène par rapport aux bicaractéristiques de P issues de x_0 , si elle est non caractéristique et vérifie la condition suivante :

$$\exists \xi_0 \in \mathbb{R}^n - \{0\} : p_m(x_0, \xi_0) = H_{p_m} \phi(x_0, \xi_0) = 0, \quad H_{p_m}^2 \phi(x_0, \xi_0) < 0, \quad (2.6)$$

avec $H_{p_m} \phi = \{p_m, \phi\}$ et $H_{p_m}^2 \phi = \{p_m, \{p_m, \phi\}\}$.

3. Énoncé du théorème

THÉORÈME 3.1. Soit P un opérateur différentiel quasi-homogène d'ordre m , à coefficients de classe C^∞ sur une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^n$, tel que la m -partie principale est à coefficients réels. Soit $x_0 \in \Omega$ et

$$S = \{x \in \Omega : \phi(x) = \phi(x_0)\} \quad (3.1)$$

une hypersurface non caractéristique en x_0 et strictement non pseudoconvexe au sens quasi-homogène par rapport aux bicaractéristiques de P issues de x_0 . Pour ξ_0 vérifiant (2.6), on suppose que

- (i) $\{\{p_m, \phi\}, \phi\}(x_0, \xi_0) \neq 0$;

(ii) $d_q p_m(x_0, \xi_0) \neq 0$ où $d_q p_m = (0, \dots, 0, d_{\xi_q} p_m, \dots, d_{\xi_n} p_m)$.

Alors il existe un voisinage W de x_0 et deux fonctions a et $u \neq 0$, de classe C^∞ sur W , s'annulant dans

$$\{x \in W : \phi(x) > \phi(x_0)\} \quad (3.2)$$

et vérifiant

$$Pu + au = 0, \quad x_0 \in \text{supp } u. \quad (3.3)$$

EXEMPLE 3.2. Soit P l'opérateur différentiel quasi-homogène défini sur $\mathbb{R}^5$, d'ordre $m = (1, 2, 4, 4, 4)$, de symbole

$$\begin{aligned} p(y_1, y_2, x_1, x_2, t, \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2, \tau) \\ = \tau^4 + \tau^2[(1+t)\xi_2^2 + \xi_1^2] + (1+t)[(1+t)\eta_2^2 - \xi_1^2\xi_2^2 + t^3\eta_1] + x_1\xi_2^3. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pour $x_0 = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, $S = \{(y, x, t) \in \mathbb{R}^5 : t = 0\}$ et $\xi_0 = (2, 1, 1, 1, 0)$, l'opérateur P vérifie les hypothèses du [théorème 3.1](#), il en résulte que P n'a pas l'unicité de Cauchy par rapport à S .

4. Preuve du [théorème 3.1](#). Toutes les hypothèses étant invariantes par changement de coordonnées respectant les coordonnées quasi-homogènes, on peut donc se ramener aux variables $(y, x, t) \in \mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}$, dans un voisinage V de $x_0 = (0, 0, 0)$, avec

$$S = \{(y, x, t) \in V : t = 0\}, \quad P = P(y, x, t, D_y, D_x, D_t). \quad (4.1)$$

On pose $s = \lambda(t - \delta)$ avec $\lambda = \delta^{-\theta}$, $\delta > 0$ et $\theta > 1$. L'opérateur P s'écrit alors dans les coordonnées (y, x, s) ,

$$P(y, x, t, D_y, D_x, D_t) = P\left(y, x, \delta + \frac{s}{\lambda}, D_y, D_x, \lambda D_s\right). \quad (4.2)$$

Prenons la solution u sous la forme

$$\begin{aligned} u\left(y, x, \delta + \frac{s}{\lambda}\right) &= e^{i(\sum_{j=1}^{q-1} \sigma^{1/m_j} \eta_j y_j + \sigma^{1/m_n} (\tilde{\xi}(y, x, \delta) + (s/\lambda)\tau(y, x, \delta)))} \\ &\quad \times e^{v\varphi(y, x, \delta, s)} e^{-\gamma(y, x, \delta)} w(y, x, \delta, s). \end{aligned} \quad (4.3)$$

On définit un opérateur $\tilde{P}$ par $Pu/u = \tilde{P}w/w$ avec

$$\begin{aligned} \tilde{P}(y, x, \delta, s, D_y, D_x, D_s) \\ = P\left(y, x, \delta + \frac{s}{\lambda}, \left(\sigma^{1/m_j} \eta_j + \sigma^{1/m_n} \tilde{\xi} + \sigma^{1/m_n} \frac{s}{\lambda} \nabla_j \tau + \frac{v}{i} \nabla_j \varphi - \frac{1}{i} \nabla_j \gamma + D_{y_j}\right)_{1 \leq j \leq q-1}, \right. \\ \left. \sigma^{1/m_n} \nabla_x \tilde{\xi} + \sigma^{1/m_n} \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau + \frac{v}{i} \nabla_x \varphi - \frac{1}{i} \nabla_x \gamma + D_x, \sigma^{1/m_n} \tau + \frac{1}{i} \lambda v \varphi'_s + \lambda D_s\right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

où ∇_x désigne le vecteur gradient par rapport à la variable x et ∇_j désigne la dérivée par rapport à la variable y_j .

4.1. Choix de $\eta, \tilde{\xi}, \tau$

LEMME 4.1. Soit p_m le m -symbole principal de P ; $\zeta_0 = (\eta_0, \xi_0, \tau_0)$ satisfaisant les hypothèses du [théorème 3.1](#). Alors on peut trouver un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}$, des fonctions $\eta(y, x, t) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{q-1})(y, x, t)$, $\xi(y, x, t) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{q-1})(y, x, t)$, $\tau(y, x, t)$ et $\delta_0 > 0$ tels que pour tout $0 < \delta < \delta_0$ et (y, x) près de l'origine dans $\mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^{n-q}$ on a

$$p_m(y, x, \delta, \eta, \nabla_x \xi, \tau) = \frac{\partial p_m}{\partial \tau}(y, x, \delta, \eta, \nabla_x \xi, \tau) = 0, \quad (4.5)$$

$$(\eta(0), \nabla_x \xi(0), \tau(0)) = \zeta_0.$$

PREUVE. On prend pour tout (y, x, t) , $\eta(y, x, t) = \eta_0$ c'est-à-dire $\eta_j = \eta_{0j}$. D'après les hypothèses (2.6) et le (i) du [théorème 3.1](#), on a

$$\frac{\partial p_m}{\partial \tau}(0, \zeta_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 p_m}{\partial \tau^2}(0, \zeta_0) \neq 0, \quad (4.6)$$

il résulte d'après le théorème des fonctions implicites qu'il existe une fonction q de classe C^∞ ,

$$q : V(0, \eta_0, \xi_0) \longrightarrow V(\tau_0) \subset \mathbb{R}, \quad (y, x, t, \eta, \xi) \longmapsto q(y, x, t, \eta, \xi), \quad (4.7)$$

vérifiant

$$q(0, \eta_0, \xi_0) = \tau_0, \quad \frac{\partial p_m}{\partial \tau}(y, x, t, \eta, \xi, q(y, x, t, \eta, \xi)) = 0. \quad (4.8)$$

On note

$$F(y, x, t, \eta, \xi) = p_m(y, x, t, \eta, \xi, q(y, x, t, \eta, \xi)), \quad (4.9)$$

on a alors $F(0, 0, 0, \eta_0, \xi_0) = p_m(0, 0, 0, \eta_0, \xi_0, \tau_0) = 0$ et pour tout $1 \leq j \leq n - q$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi_j}(y, x, t, \eta, \xi) &= \frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}(y, x, t, \eta, \xi, q(y, x, t, \eta, \xi)) \\ &+ \frac{\partial q}{\partial \xi_j}(y, x, t, \eta, \xi) \frac{\partial p_m}{\partial \tau}(y, x, t, \eta, \xi, q(y, x, t, \eta, \xi)). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ainsi d'après l'hypothèse (ii) du [théorème 3.1](#), on déduit que

$$d_{\xi} F(0, 0, 0, \eta_0, \xi_0) = d_{\xi} p_m(0, 0, 0, \eta_0, \xi_0, \tau_0) \neq 0. \quad (4.11)$$

Il résulte du théorème d'Hamilton-Jacobi que l'équation

$$F(y, x, t, \eta, \nabla_x \Psi(y, x, t, \eta)) = 0, \quad \nabla_x \Psi(0, 0, 0, \eta_0) = \xi_0, \quad (4.12)$$

admet une solution C^∞ , $\Psi(y, x, t, \eta)$, (y, x, t) près de l'origine, η voisin de η_0 . On pose

$$\xi(y, x, t) = \Psi(y, x, t, \eta_0), \quad \tau(y, x, t) = q(y, x, t, \eta_0, \nabla_x \xi(y, x, t)). \quad (4.13)$$

On choisit $\delta_0 > 0$ tel que pour tout δ , $0 < \delta < \delta_0$, on a (y, x, δ) voisin de l'origine. Ceci achève la démonstration du [lemme 4.1](#). $\square$

On prend

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_0, \\ \tau(y, x, \delta) &= q(y, x, \delta, \eta_0, \nabla_x \xi(y, x, \delta)), \\ \tilde{\xi}(y, x, \delta) &= \xi(y, x, \delta) + \frac{c \cdot x}{\lambda},\end{aligned}\tag{4.14}$$

où c est un vecteur constant de $\mathbb{R}^{n-q}$ qu'on fixera ultérieurement.

LEMME 4.2. Notons $\zeta_0 = (\eta_0, \xi_0, \tau_0)$ et $\phi(y, x, t) = t$, on a la relation

$$\{p_m, \{p_m, \phi\}\}(0, \zeta_0) = -(p_m)''_{\tau\tau} \left(p'_{mt} + \sum_{j=1}^{n-q} \frac{\partial p_m}{\partial \xi_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \right) (0, \zeta_0).\tag{4.15}$$

PREUVE. Dans toute cette preuve on écrira p à la place de p_m . On a

$$\{p, \phi\} = p'_\tau, \quad \{p, \{p, \phi\}\} = \sum_{j=1}^{n-q} (p'_{\xi_j} p''_{\tau x_j} - p'_{x_j} p''_{\tau \xi_j}) + p'_\tau p''_{\tau t} - p'_t p''_{\tau\tau}.\tag{4.16}$$

D'après (4.5) on obtient pour tout $1 \leq j \leq n-q$

$$p'_{x_j} + \sum_{k=1}^{n-q} p'_{\xi_k} \xi''_{x_j x_k} + p'_\tau \tau'_{x_j} = 0,\tag{4.17}$$

d'où

$$\begin{aligned}p'_{x_j} &= - \sum_{k=1}^{n-q} p'_{\xi_k} \xi''_{x_j x_k} - p'_\tau \tau'_{x_j}, \\ p''_{\tau x_j} + \sum_{k=1}^{n-q} p''_{\tau \xi_k} \xi''_{x_j x_k} + p''_{\tau\tau} \tau'_{x_j} &= 0,\end{aligned}\tag{4.18}$$

d'où

$$p''_{\tau x_j} = - \sum_{k=1}^{n-q} p''_{\tau \xi_k} \xi''_{x_j x_k} - p''_{\tau\tau} \tau'_{x_j},\tag{4.19}$$

par suite

$$\begin{aligned}\{p, \{p, \phi\}\} &= - \sum_{j,k=1}^{n-q} p'_{\xi_j} p''_{\tau \xi_k} \xi''_{x_k x_j} - \sum_{j=1}^{n-q} p'_{\xi_j} p''_{\tau\tau} \tau'_{x_j} \\ &\quad + \sum_{j,k=1}^{n-q} p''_{\tau \xi_j} p'_{\xi_k} \xi''_{x_j x_k} + \sum_{j=1}^{n-q} p''_{\tau \xi_j} p'_\tau \tau'_{x_j} + p'_\tau p''_{\tau t} - p'_t p''_{\tau\tau}.\end{aligned}\tag{4.20}$$

On en déduit que $\{p, \{p, \phi\}\}(0, \zeta_0) = -p''_{\tau\tau} (\sum_{j=1}^{n-q} p'_{\xi_j} \tau'_{x_j} + p'_t)(0, \zeta_0)$. $\square$

4.2. Choix de φ

LEMME 4.3. *Il existe c dans $\mathbb{R}^{n-q}$ tel que*

$$p'_t(0, \zeta_0) + \sum_{j=1}^{n-q} (\tau'_{x_j} - c_j) p'_{\xi_j}(0, \zeta_0) = 0 \quad (4.21)$$

et il existe une fonction $\varphi(y, x, \delta, s)$ de classe C^∞ dans $V_0 \times]0, \delta_0[\times]-s_0, s_0[$, où V_0 est un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^{n-q}$ tels que

$$p_m \left(y, x, \delta + \frac{s}{\lambda}, \eta, \nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau, \tau + \sigma^{-1/mn} \lambda \nu D_s \varphi \right) = 0, \quad (4.22)$$

avec

$$\operatorname{Re} \varphi(y, x, \delta, s) = \alpha(y, x, \delta) s + \beta(y, x, \delta, s) s^2, \quad (4.23)$$

où α et β sont des fonctions de classe C^∞ sur $V_0 \times]0, \delta_0[\times]-s_0, s_0[$,

$$\alpha(0, 0, 0) < 0, \quad \beta(0, 0, 0, 0) < 0. \quad (4.24)$$

PREUVE. Dans cette preuve on écrira p à la place de p_m . Posons

$$G(y, x, \delta, s, z) = \delta^{-\theta} p \left(y, x, \delta + \frac{s}{\lambda}, \eta, \nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau, \tau + \delta^{\theta/2} z \right). \quad (4.25)$$

On a

$$\nabla_x \tilde{\xi} = \nabla_x \xi + \frac{c}{\lambda} = \nabla_x \xi + c \delta^\theta. \quad (4.26)$$

On voudrait trouver $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

$$G(0, 0, 0, 0, z_0) = 0, \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}(0, 0, 0, 0, z_0) \neq 0. \quad (4.28)$$

Pour cela on pose $X = (y, x, \delta + s \delta^\theta, \eta, \nabla_x \xi + c \delta^\theta + s \delta^\theta \nabla_x \tau, \tau)$ et on applique la formule de Taylor à p au point X jusqu'à l'ordre 2 ; on obtient

$$G(y, x, \delta, s, z) = \delta^{-\theta} p(X) + \delta^{-\theta/2} z p'_\tau(X) + \frac{z^2}{2} p''_{\tau\tau}(X) + O(\delta^{\theta/2}). \quad (4.29)$$

Ensuite, on pose $X_1 = (y, x, \delta, \eta, \nabla_x \xi, \tau)$ et on applique de nouveau la formule de Taylor au point X_1 à l'ordre 1 on aura

$$\begin{aligned} G(y, x, \delta, s, z) &= \delta^{-\theta} p(X_1) + s p'_t(X_1) + \sum_{j=1}^{n-q} (c_j + s \tau'_{x_j}) p'_{\xi_j}(X_1) \\ &\quad + \delta^{-\theta/2} z p'_\tau(X_1) + \frac{z^2}{2} p''_{\tau\tau}(X_1) + O(\delta^{\theta/2}). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Or d'après (4.5), $p(X_1) = p'_\tau(X_1) = 0$, d'où

$$G(y, x, \delta, s, z) = s \left[p'_t(X_1) + \sum_{j=1}^{n-q} \tau'_{x_j} p'_{\xi_j}(X_1) \right] + \sum_{j=1}^{n-q} c_j p'_{\xi_j}(X_1) + \frac{z^2}{2} p''_{\tau\tau}(X_1) + O(\delta^{\theta/2}). \quad (4.31)$$

Ainsi

$$G(0, 0, 0, 0, z_0) = \sum_{j=1}^{n-q} c_j p'_{\xi_j}(0, \zeta_0) + \frac{z_0^2}{2} p''_{\tau\tau}(0, \zeta_0). \quad (4.32)$$

On pose

$$A = \sum_{j=1}^{n-q} c_j p'_{\xi_j}(0, \zeta_0), \quad B = p'_t(0, \zeta_0) + \sum_{j=1}^{n-q} \tau'_{x_j} p'_{\xi_j}(0, \zeta_0). \quad (4.33)$$

Comme

$$d_\xi p(0, \zeta_0) \neq 0, \quad (4.34)$$

on peut donc trouver $c \in \mathbb{R}^{n-q}$ tel que

$$A = B. \quad (4.35)$$

On déduit de (4.27), (4.32) que z_0 est donné par

$$z_0^2 = -\frac{2B}{p''_{\tau\tau}(0, \zeta_0)}. \quad (4.36)$$

D'après le lemme 4.2 et l'hypothèse de non stricte pseudoconvexité de l'hypersurface on a $z_0^2 < 0$. Ainsi z_0 est imaginaire pur. On choisit z_0 tel que $\text{Im } z_0 > 0$. Donc d'après l'hypothèse (i) du théorème 3.1 on a

$$\begin{aligned} G(0, 0, 0, 0, z_0) &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial z}(0, 0, 0, 0, z_0) &= z_0 p''_{\tau\tau}(0, \zeta_0) \neq 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage V de $(0, 0, 0, 0)$ dans $\mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et une fonction

$$g : V \rightarrow V(z_0) \subset \mathbb{C}, \quad (y, x, \delta, s) \mapsto g(y, x, \delta, s) \quad (4.38)$$

vérifiant

$$g(0, 0, 0, 0) = z_0, \quad (4.39)$$

$$G(y, x, \delta, s, g(y, x, \delta, s)) = 0 \quad \text{dans } V. \quad (4.40)$$

On pose

$$D_s \varphi(y, x, \delta, s) = g(y, x, \delta, s) \quad (4.41)$$

avec

$$\varphi|_{s=0} = 0, \quad (4.42)$$

alors

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(\mathcal{Y}, x, \delta, s) = i \frac{\partial g}{\partial s}(\mathcal{Y}, x, \delta, s). \quad (4.43)$$

Par ailleurs, d'après (4.25), (4.39) et (4.41) on a

$$p(\mathcal{Y}, x, \delta + \delta^\theta s, \eta, \nabla_x \tilde{\xi} + \delta^\theta s \nabla_x \tau, \tau + \delta^{\theta/2} D_s \varphi(\mathcal{Y}, x, \delta, s)) = 0, \quad (4.44)$$

en dérivant cette expression par rapport à s on obtient

$$\delta^\theta p'_t + \delta^\theta \tau'_x \cdot p'_\xi + \frac{\delta^{\theta/2}}{i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} p'_\tau = 0. \quad (4.45)$$

D'où en prenant $\mathcal{Y} = 0, x = 0, s = 0$ et $\eta = \eta_0$ on obtient

$$\begin{aligned} & \delta^\theta p'_t(0, 0, \delta, \eta_0, \nabla_x \tilde{\xi}, \tau + \delta^{\theta/2} D_s \varphi) \\ & + \delta^\theta \tau'_x(0, 0, \delta) \cdot p'_\xi(0, 0, \delta, \eta_0, \xi_0, \tau_0 + \delta^{\theta/2} D_s \varphi) \\ & + \frac{\delta^{\theta/2}}{i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(0, 0, \delta, 0) p'_\tau(0, 0, \delta, \eta_0, \xi_0, \tau_0 + \delta^{\theta/2} D_s \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Appliquons la formule de Taylor à p'_t, p'_ξ et p'_τ à l'ordre 1, au point

$$X = (0, 0, \delta, \eta_0, \nabla_x \xi(0, 0, \delta), \tau(0, 0, \delta)), \quad (4.47)$$

il en résulte que

$$\begin{aligned} & \delta^\theta p'_t(X) + \delta^\theta \tau'_x(0, 0, \delta) \cdot p'_\xi(X) + \frac{\delta^{\theta/2}}{i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(0, 0, \delta, 0) p'_\tau(X) \\ & + \frac{\delta^\theta}{i} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} D_s \varphi \right)(0, 0, \delta, 0) p''_{\tau\tau}(X) + o(\delta^\theta) = 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

D'après le lemme 4.1, nous avons pour $\delta < \delta_0$

$$p'_\tau(0, 0, \delta, \eta_0, \nabla_x \xi(0, 0, \delta), \tau(0, 0, \delta)) = 0, \quad (4.49)$$

d'où (4.48) devient

$$\delta^\theta p'_t(X) + \delta^\theta \tau'_x(0, 0, \delta) \cdot p'_\xi(X) + \frac{\delta^\theta}{i} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} D_s \varphi \right)(0, 0, \delta, 0) p''_{\tau\tau}(X) + o(\delta^\theta) = 0. \quad (4.50)$$

On en déduit que

$$p'_t(X) + \tau'_x(0, 0, \delta) \cdot p'_\xi(X) + \frac{1}{i} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} D_s \varphi \right)(0, 0, \delta, 0) p''_{\tau\tau}(X) + o(1) = 0. \quad (4.51)$$

En faisant tendre δ vers zéro, on obtient

$$B + \frac{1}{i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} z_0 p''_{\tau\tau}(0, \zeta_0) = 0, \quad (4.52)$$

donc

$$B + g'_s(0, 0, 0, 0) z_0 p''_{\tau\tau}(0, \zeta_0) = 0. \quad (4.53)$$

Par ailleurs, nous avons $z_0^2 = -2B/P''_{\tau\tau}(0, \zeta_0)$, ceci donne

$$Bz_0 - 2Bg'_s(0) = 0, \quad (4.54)$$

d'où $g'_s(0) = z_0/2$. Ainsi

$$\operatorname{Re} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(0) = -\operatorname{Im} g'_s(0) = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} z_0 < 0, \quad (4.55)$$

par suite $\beta(0, 0, 0, 0) < 0$ et

$$\alpha(0, 0, 0) = \operatorname{Re} i g(0, 0, 0, 0) = i z_0 < 0. \quad (4.56)$$

□

COROLLAIRE 4.4. *On a*

$$\begin{aligned} p_m \left(\gamma, x, \delta + \frac{s}{\lambda}, \eta, \nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau, \tau + \frac{\lambda \nu}{\sigma^{1/m_n}} \left(D_s \varphi + \frac{1}{\nu} D_s \right) \right) \\ = \frac{1}{\lambda \nu} [H(\gamma, x, \delta, s) D_s + K(\gamma, x, \delta, s) + \delta^r Q(\gamma, x, \delta, s, D_s)], \end{aligned} \quad (4.57)$$

où H , K et les coefficients de Q sont réguliers, $H(0) \neq 0$, $r > 0$ et Q un opérateur différentiel en D_s .

PREUVE. Fixons $\sigma^{1/m_n} = \lambda^{3/2} \nu$. Dans cette preuve on écrira p à la place de p_m . On a

$$\begin{aligned} p \left(\gamma, x, \delta + \frac{s}{\lambda}, \eta, \nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau, \tau + \frac{\lambda \nu}{\sigma^{1/m_n}} \left(D_s \varphi + \frac{1}{\nu} D_s \right) \right) \\ = \sum_{|\alpha': m'| + |\beta: m_n| + k/m_n = 1} a_{\alpha' \beta k} \eta^{\alpha'} \left(\nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau \right)^\beta \\ \times \left(\tau + \delta^{\theta/2} \left(D_s \varphi + \frac{1}{\nu} D_s \right) \right)^k, \end{aligned} \quad (4.58)$$

où $\alpha' \in \mathbb{N}^{q-1}$, $m' = (m_1, \dots, m_{q-1})$, $\beta \in \mathbb{N}^{n-q-1}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Pour montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \left[\tau + \delta^{\theta/2} \left(D_s \varphi + \frac{1}{\nu} D_s \right) \right]^k &= (\tau + \delta^{\theta/2} D_s \varphi)^k + k(\tau + \delta^{\theta/2} D_s \varphi)^k \delta^{\theta/2} D_s \\ &\quad - a_k \tau^{k-2} \frac{\delta^\theta}{\nu} \varphi''_{ss} + \delta^r \frac{\delta^\theta}{\nu} R_k(\gamma, x, \delta, s, D_s), \end{aligned} \quad (4.59)$$

il suffit de raisonner par récurrence sur k . De (4.59) on déduit que

$$\begin{aligned}
 & p\left(y, x, \delta + \frac{s}{\lambda}, \eta, \nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau, \tau + \delta^{\theta/2} \left(D_s \varphi + \frac{1}{\nu} D_s\right)\right) \\
 &= \sum_{|\alpha': m'| + |\beta: m_n| + k/m_n = 1} a_{\alpha' \beta k} \eta^{\alpha'} \left(\nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau\right)^{\beta} (\tau + \delta^{\theta/2} (D_s \varphi))^k \\
 &+ \sum_{|\alpha': m'| + |\beta: m_n| + k/m_n = 1} a_{\alpha' \beta k} \eta^{\alpha'} \left(\nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau\right)^{\beta} k (\tau + \delta^{\theta/2} D_s \varphi)^{k-1} \frac{\delta^{\theta/2}}{\nu} D_s \\
 &- \sum_{|\alpha': m'| + |\beta: m_n| + k/m_n = 1} a_{\alpha' \beta k} \eta^{\alpha'} \left(\nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau\right)^{\beta} \tau^{k-2} \frac{\delta^{\theta}}{\nu} \varphi''_{ss} \\
 &+ \delta^r \sum_{|\alpha': m'| + |\beta: m_n| + k/m_n = 1} \frac{\delta^{\theta}}{\nu} a_{\alpha' \beta k} \eta^{\alpha'} \left(\nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau\right)^{\beta} R_k(y, x, \delta, s, D_s).
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Or d'après le lemme 4.3 et ce qui précède on a

$$\begin{aligned}
 & \sum_{|\alpha': m'| + |\beta: m_n| + k/m_n = 1} a_{\alpha' \beta k} \eta^{\alpha'} \left(\nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau\right)^{\beta} (\tau + \delta^{\theta/2} (D_s \varphi))^k \\
 &= p\left(y, x, \delta + \frac{s}{\lambda}, \eta, \nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau, \tau + \delta^{\theta/2} D_s \varphi\right) = 0, \\
 & \sum_{|\alpha': m'| + |\beta: m_n| + k/m_n = 1} a_{\alpha' \beta k} \eta^{\alpha'} \left(\nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau\right)^{\beta} k (\tau + \delta^{\theta/2} D_s \varphi)^{k-1} \frac{\delta^{\theta/2}}{\nu} D_s \\
 &= p'_{\tau} \left(y, x, \delta + \frac{s}{\lambda}, \eta, \nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau, \tau + \delta^{\theta/2} D_s \varphi\right) \frac{\delta^{\theta/2}}{\nu} D_s, \\
 &- \sum_{|\alpha': m'| + |\beta: m_n| + k/m_n = 1} a_{\alpha' \beta k} \eta^{\alpha'} \left(\nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau\right)^{\beta} \tau^{k-2} \frac{\delta^{\theta}}{\nu} \varphi''_{ss} \\
 &= \frac{\delta^{\theta}}{\nu} K(y, x, \delta, s), \\
 & \delta^r \sum_{|\alpha': m'| + |\beta: m_n| + k/m_n = 1} \frac{\delta^{\theta}}{\nu} a_{\alpha' \beta k} \eta^{\alpha'} \left(\nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau\right)^{\beta} R_k(y, x, \delta, s, D_s) \\
 &= \delta^r \frac{\delta^{\theta}}{\nu} Q(y, x, \delta, s, D_s).
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Reprenons le terme $\sum_{|\alpha': m'| + |\beta: m_n| + k/m_n = 1} a_{\alpha' \beta k} \eta^{\alpha'} (\nabla_x \tilde{\xi} + (s/\lambda) \nabla_x \tau)^{\beta} k (\tau + \delta^{\theta/2} D_s \varphi)^{k-1} (\delta^{\theta/2}/\nu) D_s$ et appliquons la formule de Taylor d'abord au point $X = (y, x, \delta + s/\lambda, \eta, \nabla_x \tilde{\xi} + (s/\lambda) \nabla_x \tau, \tau)$ à l'ordre 2, puis au point $X_1 = (y, x, \delta, \eta, \nabla_x \tilde{\xi}, \tau)$ à l'ordre 1, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & p'_{\tau} \left(y, x, \delta + \frac{s}{\lambda}, \eta, \nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau, \tau + \delta^{\theta/2} D_s \varphi\right) \\
 &= p'_{\tau}(X_1) + \delta^{\theta/2} (D_s \varphi) p''_{\tau\tau}(X_1) + O(\delta^{\theta}).
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Il en résulte qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\begin{aligned} p\left(\gamma, x, \delta + \frac{s}{\lambda}, \eta, \nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau, \tau + \delta^{\theta/2} \left(D_s \varphi + \frac{1}{v} D_s\right)\right) \\ = \frac{1}{\lambda v} [p''_{\tau\tau}(\gamma, x, \delta, \eta, \nabla_x \xi, \tau)(D_s \varphi) D_s + K(\gamma, x, \delta, s) + \delta^r Q(\gamma, x, \delta, D_s)]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Nous avons par hypothèse (i) du [théorème 3.1](#) que $p''_{\tau\tau}(0, 0, 0, \zeta_0) \neq 0$. En posant

$$H(\gamma, x, \delta, s) = p''_{\tau\tau}(\gamma, x, \delta, \eta, \nabla_x \xi, \tau)(D_s \varphi), \quad (4.64)$$

nous obtenons le résultat cherché. $\square$

4.3. Recollement des solutions asymptotiques. Les constructions précédentes nous donnent une famille de fonctions u_δ dépendant du paramètre $\delta > 0$ qui pour t près de δ vérifient $Pu_\delta = 0$.

Dans la suite, on donne à δ la suite de valeurs $\delta_k = b_k = k^{-\rho}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\rho > 0$. On note $v = v_k = k^\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ et $\sigma = \sigma_k = (\lambda_k^{3/2} v_k)^{m_n}$. On notera pour $t \in [b_{k+1}, b_{k-1}]$, $t = \delta_k + s/\lambda_k$, la fonction

$$\begin{aligned} u_k\left(\gamma, x, \delta_k + \frac{s}{\lambda_k}\right) = e^{i(\sum_{j=1}^{q-1} \sigma^{1/m_j} \eta_j \gamma_j + \sigma^{1/m_n} (\tilde{\xi}(\gamma, x, \delta_k) + (s/\lambda_k) \tau(\gamma, x, \delta_k)))} \\ \times e^{v_k \varphi(\gamma, x, \delta_k, s)} e^{-\gamma(\gamma, x, \delta_k)} w(\gamma, x, \delta_k, s). \end{aligned} \quad (4.65)$$

On a pour k assez grand et $t \in [b_{k+1}, b_{k-1}]$

$$|s| = \lambda_k |t - \delta_k| \leq \lambda_k |\delta_{k-1} - \delta_k| \simeq \rho k^{\rho(\theta-1)-1}. \quad (4.66)$$

Notons (c.1) la condition suivante :

$$(c.1) \quad \rho(\theta - 1) - 1 < 0.$$

Si (c.1) est vérifiée, la fonction u_k est bien définie.

L'opérateur $\tilde{P}$ défini par (4.4) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \tilde{P} = \sigma P_m \left(\gamma, x, \delta + \frac{s}{\lambda}, \left(\eta_j + \sigma^{1/m_n - 1/m_j} \left(\nabla_j \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_j \tau \right) + \frac{v}{i} \frac{1}{\sigma^{1/m_j}} \nabla_j \varphi \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{i} \frac{1}{\sigma^{1/m_j}} \nabla_j \gamma + \frac{1}{\sigma^{1/m_j}} D_{\gamma_j} \right)_{j \leq q-1}; \nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau \right. \\ \left. + \frac{v}{i} \frac{1}{\sigma^{1/m_n}} \nabla_x \varphi - \frac{1}{i} \frac{1}{\sigma^{1/m_n}} \nabla_x \gamma + \frac{1}{\sigma^{1/m_n}} D_x, \tau + \frac{\lambda v}{\sigma^{1/m_n}} (D_s \varphi + D_s) \right) \\ + \sigma^\kappa(\dots) + \dots \end{aligned} \quad (4.67)$$

avec $\kappa < 1$.

On impose que la fonction γ et les paramètres λ, σ, δ vérifient les conditions suivantes :

$$(c.2) \quad \sigma^{-1/m_j} \nabla_j \gamma \text{ bornée pour } \delta \text{ voisin de zéro,}$$

$$(c.3) \quad \sigma^{-1/m_n} \nabla_x \gamma \text{ bornée pour } \delta \text{ voisin de zéro,}$$

$$(c.4) \quad \lambda^{-1} \sigma^{1/m_n} - 1/m_j \text{ bornée pour } \delta \text{ voisin de zéro.}$$

4.3.1. Choix de γ . On va déterminer la fonction $\gamma(\gamma, x, \delta)$ de sorte qu'on puisse "recoller" les fonctions u_k . Pour cela on choisira les fonctions $\gamma(\gamma, x, \delta_k)$ de sorte que $|u_k| \gg |u_{k+1}|$ près de δ_k ; $|u_{k+1}| \gg |u_k|$ près de δ_{k+1} et $|u_k| = |u_{k+1}|$ en un point proche du milieu de $[\delta_k, \delta_{k+1}]$.

Pour obtenir ce résultat on a besoin du lemme suivant.

LEMME 4.5. *Posons pour $t \in [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}]$*

$$\begin{aligned} G_k(\gamma, x, t) &= v_k \operatorname{Re} \varphi(\gamma, x, \delta_k, s_k) \\ &\quad - v_{k+1} \operatorname{Re} \varphi(\gamma, x, \delta_{k+1}, s_{k+1}), \quad s_j = \lambda_j(t - \delta_j). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Notons $t_k = \delta_k/3 + (2/3)\delta_{k+1}$ et $I_k(\gamma, x) = G_k(\gamma, x, t_k)$, alors

$$I_k(\gamma, x) \simeq -\alpha(\gamma, x, 0) \frac{\rho}{3} k^{\rho(\theta-1)+\varepsilon-1}, \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty. \quad (4.69)$$

PREUVE. On a $s_k = \lambda_k(t - \delta_k)$. On pose $l_k = (1/3)(\delta_k - \delta_{k+1})$. Alors $l_k \simeq (\rho/3)k^{-\rho-1}$ pour k assez grand. Ainsi pour $t = t_k = \delta_k - 2l_k = \delta_{k+1} + l_k$ on a $s_k = \lambda_k(t_k - \delta_k) = -2\lambda_k l_k$ et $s_{k+1} = \lambda_{k+1} l_k$. On a donc

$$\begin{aligned} &v_k \operatorname{Re} \varphi(\gamma, x, \delta_k, s_k) - v_{k+1} \operatorname{Re} \varphi(\gamma, x, \delta_{k+1}, s_{k+1}) \\ &= k^\varepsilon [\alpha(\gamma, x, \delta_k) s_k + \beta(\gamma, x, \delta_k, s_k) s_k^2] \\ &\quad - (k+1)^\varepsilon [\alpha(\gamma, x, \delta_{k+1}) \cdot s_{k+1} + \beta(\gamma, x, \delta_{k+1}, s_{k+1}) \cdot s_{k+1}^2] \\ &= k^\varepsilon [\alpha(\gamma, x, \delta_k) (-2k^{\rho\theta} l_k + \beta(\gamma, x, \delta_k, s_k) (4k^{2\rho\theta} l_k^2))] \\ &\quad - (k+1)^\varepsilon [\alpha(\gamma, x, \delta_{k+1}) (k+1)^{\rho\theta} l_k + \beta(\gamma, x, \delta_{k+1}, s_{k+1}) l_k^2 (k+1)^{2\rho\theta}] \\ &= -\frac{\rho}{3} [2\alpha(\gamma, x, \delta_k) k^{\varepsilon+\rho\theta-\rho-1} + \alpha(\gamma, x, \delta_{k+1}) (k+1)^{\varepsilon+\rho\theta} k^{-\rho-1}] \\ &\quad + l_k^2 [4\beta_k k^{2\rho\theta+\varepsilon} - \beta_{k+1} (k+1)^{2\rho\theta+\varepsilon}]. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Notons $E_1 = -(\rho/3)[2\alpha(\gamma, x, \delta_k) k^{\varepsilon+\rho\theta-\rho-1} + \alpha(\gamma, x, \delta_{k+1}) (k+1)^{\varepsilon+\rho\theta} k^{-\rho-1}]$ et $E_2 = l_k^2 [4\beta_k k^{2\rho\theta+\varepsilon} - \beta_{k+1} (k+1)^{2\rho\theta+\varepsilon}]$.

On commence par calculer E_1 . On a pour k assez grand

$$\alpha(\gamma, x, \delta_k) = \alpha(\gamma, x, k^{-\rho}) = \alpha(\gamma, x, 0) + O(k^{-\rho}), \quad (4.71)$$

d'où

$$\begin{aligned} E_1 &= k^{\varepsilon+\rho\theta-\rho-1} \left[-\frac{2\rho}{3} \alpha(\gamma, x, 0) + O(k^{-\rho}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho}{3} \alpha(\gamma, x, 0) \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\varepsilon+\rho\theta} + O((k+1)^{-\rho}) \right], \end{aligned} \quad (4.72)$$

par suite

$$E_1 \simeq -k^{\varepsilon+\rho\theta-\rho-1} \rho \alpha(\gamma, x, 0), \quad (4.73)$$

quand k tend vers l'infini. L'expression E_2 s'écrit aussi sous la forme

$$E_2 = l_k^2 [4\beta_k k^{2\rho\theta+\varepsilon} - \beta_{k+1} (k+1)^{2\rho\theta+\varepsilon}] \quad (4.74)$$

or on a

$$l_k^2 \simeq \frac{\rho^2}{9} k^{-2\rho-2} \quad (4.75)$$

quand k tend vers $+\infty$ et

$$\beta(\gamma, x, s_k, \delta_k) = \beta(\gamma, x, s_k, k^{-\rho}) = \beta(\gamma, x, s_k, 0) + O(k^{-\rho}). \quad (4.76)$$

On a

$$\begin{aligned} s_k &= \lambda_k(t_k - \delta_k) = \delta_k^{-\theta} \left[\frac{1}{3} \delta_k + \frac{2}{3} \delta_{k+1} - \delta_k \right] \\ &= \frac{2}{3} \delta_k^{-\theta} [\delta_{k+1} - \delta_k] = -2\delta_k^{-\theta} l_k \simeq -\frac{2}{3} \rho k^{\rho\theta-\rho-1}, \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (4.77)$$

D'où, quand k tend vers l'infini on a

$$s_k \simeq -\frac{2}{3} \rho k^{\rho\theta-\rho-1}, \quad s_{k+1} \simeq \frac{1}{3} \rho k^{\rho\theta-\rho-1}. \quad (4.78)$$

Ainsi on a

$$\beta_k = \beta(\gamma, x, s_k, \delta_k) = \beta(\gamma, x, 0, 0) + O(k^{\rho\theta-\rho-1}) + O(k^{-\rho}). \quad (4.79)$$

On en déduit que

$$E_2 \simeq \beta(\gamma, x, 0, 0) \frac{\rho^2}{3} k^{2(\rho(\theta-1)-1)+\varepsilon}, \quad (4.80)$$

quand $k \rightarrow +\infty$. Par suite on a

$$E_1 + E_2 \simeq -\rho \alpha(\gamma, x, 0) k^{\varepsilon+\rho(\theta-1)-1}, \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty. \quad (4.81)$$

On obtient ainsi le résultat du [lemme 4.5](#). □

Démontrons maintenant le résultat énoncé au début du paragraphe [4.3.1](#). On pose pour k_0 assez grand

$$y_k(\gamma, x) = - \sum_{j=k_0}^{k-1} I_j(\gamma, x), \quad (4.82)$$

on a

$$(y_{k+1} - y_k)(\gamma, x) = -I_k(\gamma, x). \quad (4.83)$$

D'après (4.69), on a

$$I_k(\gamma, x) \simeq -\alpha(\gamma, x, 0) \rho k^{\rho(\theta-1)+\varepsilon-1}, \quad (4.84)$$

le signe de l'expression $\rho(\theta-1)+\varepsilon-1$ nous sera imposé ultérieurement par la condition (c.7). Ainsi on a

$$I_k(\gamma, x) \simeq - \int_k^{k+1} \alpha(\gamma, x, 0) \rho u^{\varepsilon+\rho\theta-\rho-1} du. \quad (4.85)$$

On peut donc écrire

$$y_k(\gamma, x) \simeq \int_{k_0}^k \alpha(\gamma, x, 0) \rho u^{\varepsilon + \rho\theta - \rho - 1} du, \quad (4.86)$$

d'où

$$\begin{aligned} y_k(\gamma, x) &\simeq \frac{\rho k^{\varepsilon + \rho(\theta - 1)}}{(\varepsilon + \rho(\theta - 1))} \alpha(\gamma, x, 0) \\ &\simeq \frac{\rho \delta^{-(\theta - 1 + \varepsilon/\rho)}}{(\varepsilon + \rho(\theta - 1))} \alpha(\gamma, x, 0). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Vérifions (c.2), (c.3) et (c.4). On a $\sigma^{1/m_j} = (\lambda_k^{3/2} v_k)^{m_n/m_j}$, d'où

$$\sigma = (k^{3/2\rho\theta} k^\varepsilon)^{m_n}, \quad \sigma^{1/m_j} = (k^{\varepsilon + (3/2)\rho\theta})^{m_n/m_j}. \quad (4.88)$$

Posons $\Gamma_j = m_n/m_j > 1$, alors

$$\begin{aligned} \sigma^{-1/m_j} \nabla_y y_k(\gamma, x) &\simeq \frac{\rho}{(\varepsilon + \rho(\theta - 1))} \nabla_y \alpha(\gamma, x, 0) \delta^{-((\theta - 1 + \varepsilon/\rho) - \Gamma_j((3/2)\theta + \varepsilon/\rho))}, \\ \theta - 1 + \frac{\varepsilon}{\rho} - \Gamma_j \left(\frac{3}{2}\theta + \frac{\varepsilon}{\rho} \right) &= \theta \left(1 - \frac{3\Gamma_j}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{\rho} (1 - \Gamma_j) - 1 < 0. \end{aligned} \quad (4.89)$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \sigma^{-1/m_n} \nabla_x y(\gamma, x, \delta_k) &\simeq \nabla_x \alpha(\gamma, x, 0) \frac{\rho}{\varepsilon + \rho(\theta - 1)} \delta^{-((\theta - 1 + \varepsilon/\rho) - (3/2)\theta - \varepsilon/\rho)} \\ &\simeq \nabla_x \alpha(\gamma, x, 0) \frac{\rho}{\varepsilon + \rho(\theta - 1)} \delta^{\theta/2 + 1}, \\ \lambda_k^{-1} \sigma_k^{1/m_n - 1/m_j} &\simeq k^{\rho\theta(- (3/2)\Gamma_j + 1/2)} k^{\varepsilon(1 - \Gamma_j)}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

On remarque que le second membre de cette dernière équivalence tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Ainsi les conditions (c.2), (c.3) et (c.4) sont vérifiées. On choisira θ et ρ de telle sorte que la condition (c.1) est vérifiée.

4.3.2. Équation de transport et choix de w

LEMME 4.6. *On a*

$$\frac{1}{\sigma} \tilde{P} = \frac{1}{\lambda v} [H(\gamma, x, \delta, s) D_s + K(\gamma, x, \delta, s) + \delta^{\tilde{r}} \tilde{Q}(\gamma, x, \delta, s, D_y, D_x, D_s)], \quad (4.91)$$

où H , K et les coefficients de $\tilde{Q}$ sont réguliers, $H(0, 0, 0, 0) \neq 0$, $\tilde{r} > 0$, à condition que l'on ait

(c.5) $\varepsilon[1 - m_n(1 - \kappa)] < \rho\theta[3m_n(1 - \kappa)/2 - 1]$ pour tout κ , $0 \leq \kappa \leq 1 - 1/m_n$ et

(c.6) $\varepsilon < \rho\theta/2$; $\varepsilon < \rho(1 - \theta/2)$.

PREUVE. Nous avons

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}\tilde{P} = P_m \Bigg(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \delta + \frac{s}{\lambda}, \left(\eta_j + \sigma^{1/m_n-1/m_j} \left(\nabla_j \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_j \tau \right) + \frac{\nu}{i} \frac{1}{\sigma^{1/m_j}} \nabla_j \varphi \right. \\ \left. - \frac{1}{i} \frac{1}{\sigma^{1/m_j}} \nabla_j \mathcal{Y} + \frac{1}{\sigma^{1/m_j}} D_{\mathcal{Y}_j} \right)_{j \leq q-1}; \nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau \\ \left. + \frac{\nu}{i} \frac{1}{\sigma^{1/m_n}} \nabla_x \varphi - \frac{1}{i} \frac{1}{\sigma^{1/m_n}} \nabla_x \mathcal{Y} + \frac{1}{\sigma^{1/m_n}} D_{\mathcal{X}}, \tau + \frac{\lambda \nu}{\sigma^{1/m_n}} (D_s \varphi + D_s) \right) \\ + \sigma^{\kappa-1}(\dots) + \dots \end{aligned} \quad (4.92)$$

avec $\kappa < 1$. En utilisant un développement de Taylor de P_m à l'ordre 1 au point $X = (\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \delta + s/\lambda, \eta, \nabla_x \tilde{\xi} + (s/\lambda) \nabla_x \tau, \tau + (\lambda \nu / \sigma^{1/m_n}) (D_s \varphi + D_s))$, on remarque d'après le [corollaire 4.4](#) que $\sigma^{-1}\tilde{P}$ s'écrit sous la forme (4.91) si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) $\sigma^{\kappa-1} = o(1/\lambda \nu)$,
- (ii) $\delta^{-d} \sigma^{-1/m_n} = o(1/\lambda \nu)$, $\delta^{-d} \sigma^{-1/m_j} = o(1/\lambda \nu)$ avec $d = \theta - 1 + \varepsilon/\rho$,
- (iii) $\nu \sigma^{-1/m_n} = o(1/\lambda \nu)$, $\nu \sigma^{-1/m_j} = o(1/\lambda \nu)$.

La condition (i) est vraie d'après (c.5), ainsi les termes de $\sigma^{-1}\tilde{P}$ provenant des termes d'ordre inférieurs de P sont inclus dans $\delta^{\tilde{r}} \tilde{Q}$. La condition (ii) est vraie d'après la deuxième partie de (c.6). La condition (iii) est vraie d'après la première partie de (c.6).

Déterminons la suite de fonctions $w_j(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \delta, s)$, $j \geq 0$, par

$$\begin{aligned} (HD_s + K)w_0 &= 0, & w_0(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \delta, 0) &= 1, \\ (HD_s + K)w_j &= -\tilde{Q}w_{j-1}, & w_j(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \delta, 0) &= 0, \quad j \geq 1. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Ainsi la solution formelle $\tilde{w} = \sum_{j \geq 0} w_j \delta^{j\tilde{r}}$ sera alors la solution de

$$(HD_s + K + \delta^{\tilde{r}} \tilde{Q})\tilde{w} = 0. \quad (4.94)$$

On prend une fonction de $(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \delta, s, z)$, $Z(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \delta, s, z)$, C^∞ près de $(0, 0, 0, 0)$, telle que

$$Z \sim \sum_{j \geq 0} w_j z^j, \quad (4.95)$$

quand z tend vers 0, au sens suivant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^{n-q}, \forall \beta \in \mathbb{N}^{q-1}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists c_{k\alpha\beta N} \geq 0, \quad (4.96)$$

tel que pour $(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \delta, s, z)$ près de l'origine on a

$$\left| D_s^k D_{\mathcal{X}}^\alpha D_{\mathcal{Y}}^\beta \left(Z - \sum_{j=0}^N w_j z^j \right) \right| \leq c_{k\alpha\beta N} |z|^{N+1}. \quad (4.97)$$

Si on prend $w(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \delta, s) = Z(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \delta, s, \delta^{\tilde{r}})$, on obtient $(HD_s + K + \delta^{\tilde{r}} \tilde{Q})w = o(\delta^\infty)$. $\square$

LEMME 4.7. *Pour tout $t \in [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}]$; $(y, x) \in V$ où V est un voisinage de $(0, 0)$, soit*

$$u_k(y, x, t) = e^{i \sum_{j=1}^{q-1} \sigma^{1/m_j} \eta_j y_j + \sigma^{1/m_n} (\tilde{\xi}(y, x, \delta_k) + (t - \delta_k) \tau(y, x, \delta_k))} \times e^{\nu_k \varphi(y, x, \delta_k, s)} e^{-\gamma(y, x, \delta_k)} w(y, x, \delta_k, s) \quad (4.98)$$

avec $s = \lambda_k(t - \delta_k)$ et soit $f_k = Pu_k/u_k$. Alors il existe $k_0 > 0$ tel qu'on a

$$\forall (\beta, \alpha, l) \in \mathbb{N}^{q-1} \times \mathbb{N}^{n-q} \times \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, N \text{ assez grand}, \exists c_{\alpha\beta l N} > 0; \exists \Gamma_N > 0 \quad (4.99)$$

tels que $|D_y^\beta D_x^\alpha D_t^l f_k(y, x, t)| \leq c_{\alpha\beta l N} k^{-\Gamma_N}$

pour tout $k, k \geq k_0$ et $(y, x, t) \in V \times [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}]$.

PREUVE. On a $Pu_k/u_k = \tilde{P}w_k/w_k = (\sigma/\lambda\nu)(1/w_k)[(HD_s + K + \delta^{\tilde{r}}\tilde{Q})w_k]$. Or

$$w_k = \sum_{j=0}^{N-1} (\delta^{\tilde{r}})^j w_j(y, x, s, \delta_k) + (\delta^{\tilde{r}})^N R_N(y, x, s, \delta_k) \quad (4.100)$$

avec R_N fonction de classe C^∞ et bornée dans un voisinage de zéro. D'où

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{\sigma}{\lambda\nu} \frac{1}{w_k} \left[\sum_{j=0}^{N-1} (\delta^{\tilde{r}})^j (HD_s + K) w_j \right. \\ &\quad \left. + (\delta^{\tilde{r}})^N (HD_s + K) R_N + \sum_{j=0}^{N-1} (\delta^{\tilde{r}})^j \tilde{Q} w_j + (\delta^{\tilde{r}})^{N+1} \tilde{Q} R_N \right] \\ &= \frac{\sigma}{\lambda\nu} \frac{1}{w_k} \left[(HD_s + K) w_0 + (\delta^{\tilde{r}})^N \tilde{Q} w_{N-1} + (\delta^{\tilde{r}})^N (HD_s + K \delta^{\tilde{r}} \tilde{Q}) R_N \right] \\ &= \frac{(k^{3\rho\theta/2+\varepsilon})^{m_n}}{k^{\rho\theta+\varepsilon}} \frac{1}{w_k} k^{-\rho\tilde{r}N} [\tilde{Q} w_{N-1} + (HD_s + K + \delta^{\tilde{r}} \tilde{Q}) R_N] \\ &= k^{\rho\theta((3/2)m_n-1)+\varepsilon(m_n-1)\rho\tilde{r}N} \frac{1}{w_k} [\tilde{Q} w_{N-1} + (HD_s + K + \delta^{\tilde{r}} \tilde{Q}) R_N] \\ &= k^{\rho[-\tilde{r}N+\theta((3/2)m_n-1)]+\varepsilon(m_n-1)} \frac{1}{w_k} [\tilde{Q} w_{N-1} + (HD_s + K + \delta^{\tilde{r}} \tilde{Q}) R_N] \\ &= k^{-\rho[\tilde{r}N-\theta((3/2)m_n-1)]+\varepsilon(m_n-1)} \frac{1}{w_k} [\tilde{Q} w_{N-1} + (HD_s + K + \delta^{\tilde{r}} \tilde{Q}) R_N]. \end{aligned} \quad (4.101)$$

On en déduit que $|f_k| \leq C_N k^{-\Gamma_N}$. On procède de même pour les dérivées de f_k . $\square$

4.3.3. Étude de l'ensemble où $|u_k| = |u_{k+1}|$. Pour $(y, x, t) \in V \times [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}]$, V est un voisinage de $(0, 0) \subset \mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^{n-q}$ posons

$$F_k(y, x, t) = \log \left| \frac{u_k}{u_{k+1}} \right|. \quad (4.102)$$

LEMME 4.8. *Il existe des constantes c et η strictement positives telles qu'on ait*

$$\frac{\partial F_k}{\partial t} \geq c k^\eta \quad (4.103)$$

avec

$$(c.7) \quad \varepsilon + \rho(\theta - 1) - 1 > 0, \eta = 2\rho\theta - \rho + \varepsilon - 1.$$

PREUVE. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_k}{\partial t} = & \left[\lambda_k \nu_k \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial s}(\gamma, x, s_k, \delta_k) - \lambda_{k+1} \nu_{k+1} \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial s}(\gamma, x, s_{k+1}, \delta_{k+1}) \right] \\ & + \left[\lambda_k \frac{w'_s(\gamma, x, s_k, \delta_k)}{w(\gamma, x, s_k, \delta_k)} - \lambda_{k+1} \frac{w'_s(\gamma, x, s_{k+1}, \delta_{k+1})}{w(\gamma, x, s_{k+1}, \delta_{k+1})} \right], \end{aligned} \quad (4.104)$$

On note $E_3 = [\lambda_k(w'_s(\gamma, x, s_k, \delta_k)/w(\gamma, x, s_k, \delta_k)) - \lambda_{k+1}(w'_s(\gamma, x, s_{k+1}, \delta_{k+1})/w(\gamma, x, s_{k+1}, \delta_{k+1}))]$.

on écrira

$$\frac{\partial F_k}{\partial t} = \left[\lambda_k \nu_k \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial s}(\gamma, x, s_k, \delta_k) - \lambda_{k+1} \nu_{k+1} \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial s}(\gamma, x, s_{k+1}, \delta_{k+1}) \right] + E_3. \quad (4.105)$$

D'après (4.25) on a

$$\operatorname{Re} \varphi(\gamma, x, s, \delta) = \alpha(\gamma, x, \delta)s + \beta(\gamma, x, \delta, s)s^2, \quad (4.106)$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial s} &= \alpha(\gamma, x, \delta) + 2\beta(\gamma, x, \delta, s)s + \beta'_s(\gamma, x, \delta, s)s^2 \\ &= \alpha(\gamma, x, \delta) + s(2\beta(\gamma, x, \delta, s) + \beta'_s(\gamma, x, \delta, s)s) \\ &= \alpha(\gamma, x, \delta) + \beta_1(\gamma, x, \delta, s)s, \end{aligned} \quad (4.107)$$

où $\beta_1(\gamma, x, \delta, s) = 2\beta(\gamma, x, \delta, s) + \beta'_s(\gamma, x, \delta, s)s$, avec $\beta_1(0, 0, 0, 0) < 0$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_k}{\partial t} &= [(\lambda_k \nu_k - \lambda_{k+1} \nu_{k+1})\alpha(\gamma, x, \delta_k)] \\ &\quad + [\lambda_{k+1} \nu_{k+1}(\alpha(\gamma, x, \delta_k) - \alpha(\gamma, x, \delta_{k+1}))] \\ &\quad + \left[-\beta_1(\gamma, x, \delta_{k+1}, s_{k+1}) \frac{(t - \delta_{k+1})}{\delta_{k+1}^{2\theta}} \nu_{k+1} + \beta_1(\gamma, x, \delta_k, s_k) \frac{(t - \delta_k)}{\delta_k^{2\theta}} \nu_k \right] + E_3 \\ &= [(\lambda_k \nu_k - \lambda_{k+1} \nu_{k+1})\alpha(\gamma, x, \delta_k)] + [\lambda_{k+1} \nu_{k+1}(\alpha(\gamma, x, \delta_k) - \alpha(\gamma, x, \delta_{k+1}))] \\ &\quad + \left[-\beta_1(\gamma, x, \delta_{k+1}, s_{k+1}) \left(\frac{(t - \delta_{k+1})}{\delta_{k+1}^{2\theta}} \right) \nu_{k+1} + \beta_1(\gamma, x, \delta_k, s_k) \left(\frac{(t - \delta_k)}{\delta_k^{2\theta}} \right) \nu_k \right] + E_3. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Notons $E_4 = [(\lambda_k \nu_k - \lambda_{k+1} \nu_{k+1})\alpha(\gamma, x, \delta_k)]$, $E_5 = [\lambda_{k+1} \nu_{k+1}(\alpha(\gamma, x, \delta_k) - \alpha(\gamma, x, \delta_{k+1}))]$ et $E_6 = [-\beta_1(\gamma, x, \delta_{k+1}, s_{k+1})((t - \delta_{k+1})/\delta_{k+1}^{2\theta})\nu_{k+1} + \beta_1(\gamma, x, \delta_k, s_k)((t - \delta_k)/\delta_k^{2\theta})\nu_k]$.

Évaluons E_4 , nous avons

$$|E_4| \leq c_0 |\lambda_k - \lambda_{k+1}| \leq c_1 k^{\rho\theta + \varepsilon - 1}, \quad \text{avec } c_0 > 0, c_1 > 0. \quad (4.109)$$

La fonction $\alpha(\gamma, x, \delta)$ étant de classe C^∞ par rapport à (γ, x, δ^r) avec $r > 0$, alors il existe des constantes $c' > 0$ et $c'' > 0$ telles que

$$|\alpha(\gamma, x, \delta_k) - \alpha(\gamma, x, \delta_{k+1})| \leq c'(\delta_k^r - \delta_{k+1}^r) \leq c''k^{-\rho r - 1}. \quad (4.110)$$

On en déduit qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que $|E_5| \leq c_2 k^{\rho\theta+\varepsilon-\rho r-1}$. Estimons E_6 ,

$$\begin{aligned}
 E_6 &= -\beta_1(\gamma, x, \delta_{k+1}, s_{k+1}) \\
 &\quad \times \left[\left(\frac{t - \delta_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} - \frac{t - \delta_k}{\delta_{k+1}^{2\theta}} \right) v_{k+1} + (t - \delta_k) \left(\frac{v_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} - \frac{v_k}{\delta_k^{2\theta}} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{v_k}{\delta_k^{2\theta}} (t - \delta_k) [\beta_1(\gamma, x, s_{k+1}, \delta_{k+1}) - \beta_1(\gamma, x, s_k, \delta_k)], \\
 &= -\beta_1(\gamma, x, s_{k+1}, \delta_{k+1}) \left[\frac{\delta_k - \delta_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} v_{k+1} \right] \\
 &\quad - \beta_1(\gamma, x, s_{k+1}, \delta_{k+1}) \left[\frac{v_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} - \frac{v_k}{\delta_k^{2\theta}} \right] (t - \delta_k) \\
 &\quad - \frac{v_k}{\delta_k^{2\theta}} (t - \delta_k) [\beta_1(\gamma, x, s_{k+1}, \delta_{k+1}) - \beta_1(\gamma, x, s_k, \delta_k)].
 \end{aligned} \tag{4.111}$$

Pour k assez grand on a $(\delta_k - \delta_{k+1})/\delta_{k+1}^{2\theta} \simeq \rho k^{2\theta-\rho-1}$ et $v_{k+1} \simeq k^\varepsilon$. Comme $\beta_1(0, 0, 0, 0) < 0$ il existe donc une constante $\tilde{c}_0 > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
 -\beta_1(\gamma, x, s_{k+1}, \delta_{k+1}) \left[\frac{\delta_k - \delta_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} v_{k+1} \right] &= -\beta_1(\gamma, x, s_{k+1}, \delta_{k+1}) \left[\frac{\delta_k - \delta_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} v_{k+1} \right] \\
 &\geq \tilde{c}_0 k^{2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon}.
 \end{aligned} \tag{4.112}$$

On a $v_k/\delta_k^{2\theta} \simeq k^{2\rho\theta+\varepsilon}$, d'où on a $v_{k+1}/\delta_{k+1}^{2\theta} - v_k/\delta_k^{2\theta} \simeq (2\rho\theta + \varepsilon)k^{2\rho\theta+\varepsilon-1}$. Comme $t \in [\delta_{k+1}, \delta_k]$, on a $|t - \delta_k| \leq c^{te} \rho k^{-\rho-1}$. On en déduit qu'il existe une constante $\tilde{c}_1 > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
 &\left| -\beta_1(\gamma, x, s_{k+1}, \delta_{k+1}) \left[\frac{v_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} - \frac{v_k}{\delta_k^{2\theta}} \right] (t - \delta_k) \right| \\
 &= \left| (t - \delta_k) \beta_1(\gamma, x, s_{k+1}, \delta_{k+1}) \left[\frac{v_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} - \frac{v_k}{\delta_k^{2\theta}} \right] \right| \\
 &\leq \tilde{c}_1 k^{2\rho\theta+\varepsilon-2-\rho}.
 \end{aligned} \tag{4.113}$$

On a

$$\begin{aligned}
 &-\frac{v_k}{\delta_k^{2\theta}} (t - \delta_k) [\beta_1(\gamma, x, s_{k+1}, \delta_{k+1}) - \beta_1(\gamma, x, s_k, \delta_k)] \\
 &= \frac{v_k}{\delta_k^{2\theta}} (t - \delta_k) [\beta_1(\gamma, x, s_{k+1}, \delta_{k+1}) - \beta_1(\gamma, x, s_k, \delta_k)] \\
 &= o(k^{2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon}).
 \end{aligned} \tag{4.114}$$

Ainsi on déduit qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que $E_6 \geq c_3 k^{2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon}$. On voit facilement qu'il existe une constante $c_4 > 0$ telle que $|E_3| \leq c_4 k^{\rho\theta}$. On a donc obtenu

les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 |E_4| &\leq c_0 |\lambda_k - \lambda_{k+1}| \leq c_1 k^{\rho\theta + \varepsilon - 1}, \quad \text{avec } c_0 > 0, c_1 > 0, \\
 |E_5| &\leq c_2 k^{\rho\theta + \varepsilon - \rho r - 1}, \quad \text{avec } c_2 > 0, \\
 E_6 &\geq c_3 k^{2\rho\theta - \rho - 1 + \varepsilon}, \quad \text{avec } c_3 > 0, \\
 |E_3| &\leq c_4 k^{\rho\theta}, \quad \text{avec } c_4 > 0.
 \end{aligned} \tag{4.115}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \rho\theta + \varepsilon - 1 &\leq 2\rho\theta - \rho - 1 + \varepsilon \quad (\text{car } \theta > 1 \text{ et } \rho > 0), \\
 \rho\theta + \varepsilon - \rho r - 1 &\leq 2\rho\theta - \rho - 1 + \varepsilon \quad (\text{car } r > 0, \rho > 0 \text{ et } \theta > 1), \\
 \rho\theta < 2\rho\theta - \rho - 1 + \varepsilon &\Leftrightarrow \rho(\theta - 1) - 1 + \varepsilon > 0 \quad (\text{d'après (c.7)}).
 \end{aligned} \tag{4.116}$$

On en déduit qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour k assez grand

$$\frac{\partial F_k}{\partial t}(\gamma, x, t) \geq ck^\eta, \quad \text{avec } \eta = 2\rho\theta - \rho - 1 + \varepsilon \tag{4.117}$$

d'où le [lemme 4.8](#). □

Estimons maintenant la fonction F_k . D'après les expressions (4.68), (4.98) et (4.102) on peut écrire

$$\begin{aligned}
 F_k(\gamma, x, t) &= \gamma(\gamma, x, \delta_{k+1}) - \gamma(\gamma, x, \delta_k) + G_k(\gamma, x, t) \\
 &\quad + \log \left(\left| \frac{w(\gamma, x, \delta_k, \lambda_k(t - \delta_k))}{w(\gamma, x, \delta_{k+1}, \lambda_{k+1}(t - \delta_{k+1}))} \right| \right).
 \end{aligned} \tag{4.118}$$

En utilisant (4.87) et en prenant $t = t_k = (1/3)\delta_k + (2/3)\delta_{k+1}$, on obtient

$$\begin{aligned}
 F_k(\gamma, x, t_k) &= \gamma(\gamma, x, \delta_{k+1}) - \gamma(\gamma, x, \delta_k) + I_k(\gamma, x) \\
 &\quad + \log \left(\left| \frac{w(\gamma, x, \delta_k, \lambda_k(t_k - \delta_k))}{w(\gamma, x, \delta_{k+1}, \lambda_{k+1}(t_k - \delta_{k+1}))} \right| \right) \\
 &= \log \left(\left| \frac{w(\gamma, x, \delta_k, \lambda_k(t_k - \delta_k))}{w(\gamma, x, \delta_{k+1}, \lambda_{k+1}(t_k - \delta_{k+1}))} \right| \right) \\
 &= O(1).
 \end{aligned} \tag{4.119}$$

Ainsi $F_k(\gamma, x, t_k)$ est bornée indépendamment de k . Pour que $k^\eta l_k$ tende vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$ il faut que

$$(c.8) \quad 2\rho\theta + \varepsilon - 2(\rho + 1) > 0.$$

D'après (4.103), on a $F_k(\gamma, x, t)$ s'annule en un point d'un intervalle contenant t_k . D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction $t_k(\gamma, x)$ de classe C^∞ sur un voisinage V_0 de $(0, 0)$ à valeurs dans un intervalle ouvert de $[\delta_{k+1}, \delta_k]$, telle que $F_k(\gamma, x, t_k(\gamma, x)) = 0$. Par ailleurs, on vérifie que $t_k(\gamma, x) = t_k + e_k(\gamma, x)$, avec $e_k(\gamma, x) = O(k^{-\eta})$.

Les étapes suivantes étant standard, les démonstrations sont les mêmes que dans [1, 3]. On ne mentionnera que les étapes, laissant le lecteur se rapporter à [3] pour les détails.

4.3.4. Modification des u_k . On va modifier légèrement les fonctions u_k de manière à pouvoir bien définir la perturbation a .

On construit une suite de fonctions, $\gamma_k(\gamma, x, s)$, nulles sur les surfaces $t = t_k(\gamma, x)$ et $t = t_{k-1}(\gamma, x)$, plus petites que toute puissance de $1/k$ pour $t \in [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}]$, telles que, en notant

$$v_k(\gamma, x, t) = u_k(\gamma, x, t)(1 + \gamma_k(\gamma, x, s)), \quad (4.120)$$

on a

- (1) $\tilde{F}_k = \log(|v_k/v_{k+1}|)$ satisfait (4.103) et s'annule pour $t = t_k(\gamma, x)$,
- (2) $g_k = Pv_k/v_k$ satisfait (4.99),
- (3) g_k est plate sur $\{(\gamma, x, t) : t = t_k(\gamma, x)\}$ et $\{(\gamma, x, t) : t = t_{k-1}(\gamma, x)\}$.

Cette construction utilise uniquement le lemme 4.7 et le fait que les surfaces $t = c^{te}$ sont non caractéristiques pour P .

4.4. Dernière étape. On choisit χ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à support compact telle que

$$\chi(s) = 1 \quad \text{pour } |s| \leq \frac{3}{4}, \quad \text{supp } \chi \subset [-1, 1], \quad 0 \leq \chi \leq 1. \quad (4.121)$$

On pose $\chi_k(t) = \chi((t - \delta_k)/3l_k)$ et $u(\gamma, x, t) = \sum_{k \geq k_0} \chi_k(t)v_k(\gamma, x, t)$, k_0 est un entier assez grand. On vérifie alors que $a = -Pu/u$ est une fonction de classe C^∞ sur un voisinage de zéro, plate sur $t = 0$.

Il reste à vérifier que u est plate sur $t = 0$. Or, ce résultat découle du fait que d'après l'expression (4.87), la fonction $\gamma_k(\gamma, x)$ est $O(k^{\rho(\theta-1)+\varepsilon})$ et $|v_k \operatorname{Re} \varphi(\gamma, x, t)| \leq Ck^{\rho(\theta-1)+\varepsilon-1}$.

4.5. Compatibilité des conditions (c.1), ..., (c.8) et choix effectif des paramètres. Par hypothèse nous avons $\theta > 1$, $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$ et $K \leq (1 - 1/m_n)$. Les conditions sont

- (c.1) $\rho(\theta - 1) - 1 < 0$,
- (c.5) $\varepsilon[1 - m_n(1 - K)] < \rho\theta[3m_n(1 - K)/2 - 1]$,
- (c.6) $\varepsilon < \rho\theta/2$ et $\varepsilon < \rho(1 - \theta/2)$,
- (c.7) $\varepsilon + \rho(\theta - 1) - 1 > 0$,
- (c.8) $2\rho\theta + \varepsilon - 2(\rho + 1) > 0$,

fixons $\theta = 9/8$, $\varepsilon = 3/4$ et choisissons $\rho = 6$. Ainsi les conditions (c.1), (c.2), (c.3), (c.4), (c.5), (c.6), (c.7) et (c.8) sont vérifiées. Ceci achève la démonstration du théorème 3.1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Alinhac, *Non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs de type principal*, Sémin. Goulaouic-Meyer-Schwartz, Equations Deriv. Partielles 1980-1981, Exposé no. 16, École Polytechnique, Paris, 1981, pp. 1-8 (French).
- [2] L. Hörmander, *Non-uniqueness for the Cauchy problem*, Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations (Colloq. Internat., Université de Nice, Nice, 1974), Lecture Notes in Mathematics, vol. 459, Springer, Berlin, 1975, pp. 36-72.

- [3] R. Lascar and C. Zuily, *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels à caractéristiques doubles*, Duke Math. J. **49** (1982), no. 1, 137–162.
- [4] A. Plis, *A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 599–617.

KHALGUI-OUNAÏES HELLA : DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, FACULTÉ DES SCIENCES DE TUNIS, CAMPUS UNIVERSITAIRE, 1060 TUNIS, TUNISIA

E-mail address: hella.khalgui@fst.rnu.tn