
Data from the image analysis carried out on the face 1 of the RVE 60x60x60mm³

Particle	Area (A)	XM	YM	Major (L)	Minor (D)	Angle ϕ (deg)
1	8.842	10.433	1.115	5.724	1.967	20.851
2	5.603	22.048	1.431	3.628	1.966	87.138
3	41.265	30.256	3.983	10.073	5.216	22.752
4	13.477	38.205	1.537	6.602	2.599	28.297
5	25.965	48.304	3.301	7.176	4.607	104.35
6	12.24	56.309	1.531	6.749	2.309	16.21
7	6.547	13.107	3.979	3.946	2.112	149.53
8	6.66	18.052	5.029	4.776	1.775	70.207
9	5.445	55.307	4.355	5.173	1.34	163.369
10	25.425	40.756	7.088	7.767	4.168	179.479
11	9.562	3.235	7.991	5.974	2.038	152.092
12	13.387	55.139	8.438	7.226	2.359	26.239
13	9.832	12.307	7.791	7.289	1.718	169.316
14	9.427	26.782	8.391	7.786	1.542	172.393
15	10.89	20.099	9.975	5.225	2.654	45.009
16	11.452	25.624	12.837	5.731	2.544	50.355
17	4.388	1.376	11.83	3.427	1.63	40.827
18	15.57	29.979	13.51	6.862	2.889	48.578
19	11.655	10.05	12.706	5.458	2.719	10.868
20	22.095	12.851	15.354	10.447	2.693	57.908
21	6.503	37.75	13.426	3.757	2.204	19.036
22	12.42	21.435	15.316	5.993	2.639	92.109
23	7.897	58.732	14.909	3.447	2.917	62.281
24	26.212	15.933	18.274	8.273	4.034	92.46
25	14.737	1.435	17.595	6.411	2.927	69.988
26	10.957	6.693	17.666	4.216	3.309	13.781
27	9.72	37.41	18.19	4.463	2.773	159.96
28	6.435	28.657	18.779	4.095	2.001	77.472
29	3.465	31.456	18.143	2.399	1.839	116.672
30	6.525	52.233	19.072	5.93	1.401	172.472
31	12.938	24.194	21.969	7.145	2.305	100.286
32	11.025	44.911	21.62	5.534	2.536	121.503
33	16.245	40.389	21.616	4.691	4.41	34.529
34	13.432	5.477	22.319	8.801	1.943	32.326
35	5.782	56.951	21.787	5.201	1.416	39.702
36	11.137	12.695	24.017	5.284	2.683	110.654
37	12.443	27.564	24.295	6.904	2.295	122.478
38	16.043	7.072	24.976	8.879	2.3	39.565
39	12.397	50.786	25.332	4.532	3.483	169.892
40	24.21	38.472	27.34	8.83	3.491	140.206
41	13.342	32.08	26.059	5.265	3.226	66.457
42	9.63	19.962	27.437	5.427	2.259	133.804
43	30.195	52.579	30.282	8.316	4.623	55.794
44	21.33	57.456	32.949	8.892	3.054	57.044
45	10.237	1.678	30.896	4.741	2.749	69.249
46	11.07	10.602	30.685	5.696	2.475	135.507
47	10.35	30.019	31.054	6.602	1.996	31.561
48	6.142	42.529	31.359	5.28	1.481	40.639
49	3.397	5.573	31.18	3.723	1.162	27.861
50	7.605	20.955	31.756	3.76	2.575	142.188
51	27.9	34.352	33.605	7.923	4.484	15.127
52	4.792	14.559	32.179	3.06	1.994	14.011

53	3.33	17.147	32.307	2.45	1.73	109.72
54	6.795	10.338	34.732	4.718	1.834	118.712
55	9.81	42.816	34.176	3.873	3.225	39.536
56	18.585	16.45	35.677	6.038	3.919	167.765
57	7.2	26.714	37.088	5.904	1.553	78.456
58	16.537	1.461	37.46	6.365	3.308	82.51
59	17.347	7.132	38.719	7.513	2.94	71.721
60	15.48	21.009	38.213	7.679	2.567	63.095
61	6.525	59.271	38.424	5.385	1.543	84.957
62	13.747	11.182	40.514	7.8	2.244	77.005
63	12.6	15.888	40.771	7.759	2.068	118.757
64	4.185	49.476	38.609	2.841	1.876	29.568
65	18.18	41.909	41.656	5.456	4.243	107.897
66	26.55	25.04	43.263	7.688	4.397	7.25
67	8.078	8.353	43.294	4.592	2.24	76.351
68	40.072	57.231	46.178	9.224	5.531	110.398
69	15.345	31.11	47.009	8.072	2.42	82.994
70	3.24	15.478	45.124	2.363	1.746	156.826
71	5.287	5.092	47.071	3.228	2.086	126.226
72	14.58	47.527	46.157	7.077	2.623	169.269
73	12.397	1.438	46.697	4.895	3.224	75.744
74	7.425	26.973	50.54	6.52	1.45	103.133
75	19.282	17.763	51.066	7.464	3.289	117.503
76	10.44	22.942	50.842	5.8	2.292	131.829
77	10.98	38.542	49.85	4.416	3.166	54.298
78	30.645	45.247	51.174	9.425	4.14	178.548
79	18.9	54.761	51.525	12.199	1.973	148.34
80	44.347	7.519	54.691	10.868	5.196	35.477
81	8.662	29.772	55.48	4.688	2.352	131.275
82	16.875	39.922	56.937	7.024	3.059	129.113
83	8.527	44.873	55.773	3.749	2.896	115.73
84	9.36	16.121	56.614	4.677	2.548	45.061
85	3.712	1.037	55.497	2.503	1.888	165.972
86	7.267	23.593	56.71	4.412	2.097	170.403
87	4.432	36.193	57.752	3.536	1.596	18.128

Mathematical calculation codes for homogenisation models:

The input parameters in the calculation code are those from a study of Nguyen 2008 (see Figures 12 and 13 of section 3.3)

Lower bound of Hashin Strikman

```
f=0.80
Em=2.518;
Ec=73.08;
Vm=0.413;
Vc=0.172;
r=3.018;
(*Valeur des coefficients km kc  $\bar{\nu}_m$  et  $\bar{\nu}_c$  *)
km=Em/3(1-2vm);
 $\bar{\nu}_m$ =Em/2(1+vm);
kc=Ec/3(1-2vc);
 $\bar{\nu}_c$ =Ec/2(1+vc);
 $\ell_m$ = (Em vm) / ((1+vm) (1-2vm));
 $\ell_c$ =(Ec vc) / ((1+vc) (1-2vc));
TenseurI=Table[1/2 (KroneckerDelta[i, k]
KroneckerDelta[j,l]+KroneckerDelta[i,l] KroneckerDelta[j,k]),
{i, 1,3},{j, 1,3},{k, 1,3},{l, 1,3}];
TenseurJ=1/3 TensorProduct[IdentityMatrix[3],
IdentityMatrix[3]];
TenseurK= TenseurI - TenseurJ;
TenseurCm= 3km TenseurJ + 2 $\bar{\nu}_m$  TenseurK;
TenseurCc= 3kc TenseurJ + 2 $\bar{\nu}_c$  TenseurK;
TenseurI//MatrixForm;
TenseurJ//MatrixForm;
TenseurK//MatrixForm;
Print["Tenseurs Cm et Cc"]
TenseurCm//MatrixForm
TenseurCc//MatrixForm
MatrixCm = ({
    { $\ell_m+2\bar{\nu}_m$ ,  $\ell_m$ ,  $\ell_m$ , 0, 0, 0},
    { $\ell_m$ ,  $\ell_m+2\bar{\nu}_m$ ,  $\ell_m$ , 0, 0, 0},
    { $\ell_m$ ,  $\ell_m$ ,  $\ell_m+2\bar{\nu}_m$ , 0, 0, 0},
```

```

        {0, 0, 0,  $\mp m$ , 0, 0},
        {0, 0, 0, 0,  $\mp m$ , 0},
        {0, 0, 0, 0, 0,  $\mp m$ }
    });
MatrixCc = ({
    { $l_c + 2\mp c$ ,  $l_c$ ,  $l_c$ , 0, 0, 0},
    { $l_c$ ,  $l_c + 2\mp c$ ,  $l_c$ , 0, 0, 0},
    { $l_c$ ,  $l_c$ ,  $l_c + 2\mp c$ , 0, 0, 0},
    {0, 0, 0,  $\mp c$ , 0, 0},
    {0, 0, 0, 0,  $\mp c$ , 0},
    {0, 0, 0, 0, 0,  $\mp c$ }
});
(*MatrixCm//MatrixForm
MatrixCc//MatrixForm*)
(*Calcul de l'inverse des tenseurs*)

TenseurSm = 1/(3km) TenseurJ + 1/(2 $\mp m$ ) TenseurK;
TenseurSc = 1/(3kc) TenseurJ + 1/(2 $\mp c$ ) TenseurK;
Print["Tenseurs de souplesse Sm et Sc"];
TenseurSm//MatrixForm
TenseurSc//MatrixForm

(*MatrixSm=Inverse[MatrixCm];
MatrixSc=Inverse[MatrixCc];
MatrixSm//MatrixForm
MatrixSc//MatrixForm*)

TenseurCmax= 3 Max[km, kc] TenseurJ + 2 Max[ $\mp m$ ,  $\mp c$ ] TenseurK;
TenseurCmin=3 Min[km, kc] TenseurJ + 2 Min[ $\mp m$ ,  $\mp c$ ] TenseurK;
TenseurSmax= 1/(3 Max[km, kc]) TenseurJ + 1/(2 Max[ $\mp m$ ,  $\mp c$ ])
TenseurK;
TenseurSmin= 1/(3 Min[km, kc]) TenseurJ + 1/(2 Min[ $\mp m$ ,  $\mp c$ ])
TenseurK;
Print["Tenseurs de rigidité et de souplesses des matériaux le
plus rigide et le plus souple Cmax ET Cmin"]
TenseurCmax//MatrixForm
TenseurCmin//MatrixForm

```

```

TenseurSmax//MatrixForm
TenseurSmin//MatrixForm
(*Entrée du tenseur de concentration d'Eshelby pour inclusion
ellipsoïdale de révolution*)

CoefG = r/(r^2-1)^(3/2) (r (r^2-1)^(1/2)- ArcCosh[r])
TenseurEsh=Table[0, {i, 1, 3}, {j, 1, 3}, {k, 1, 3}, {l, 1,
3}];
TenseurEsh[[1, 1, 1, 1]]=1/(2(1-vm))*(1 - 2vm +(3r^2-1)/(r^2-
1)-(1 - 2vm +(3r^2)/(r^2-1))*CoefG);
TenseurEsh[[2, 2, 2, 2]]=(3/(8(1-vm)))(r^2/(r^2-1))+1/(4(1-
vm)) (1 - 2vm - 9/(4(r^2-1))) CoefG;
TenseurEsh[[3, 3, 3, 3]] = TenseurEsh[[2, 2, 2, 2]];
TenseurEsh[[2, 2, 3, 3]] = 1/(4(1-vm)) (r^2/(2(r^2-1)) -(1 -
2vm + 3/(4(r^2-1))) CoefG);
TenseurEsh[[3, 3, 2, 2]]= TenseurEsh[[2, 2, 3, 3]];
TenseurEsh[[2, 2, 1, 1]]= -(1/(2(1-vm)))(r^2/(r^2-1))+1/(4(1-
vm)) ((3r^2)/(r^2-1)-(1 - 2vm )) CoefG;
TenseurEsh[[3, 3, 1, 1]]=TenseurEsh[[2, 2, 1, 1]];
TenseurEsh[[1, 1, 2, 2]]=-1/(2(1-vm))(1 - 2vm +1/(r^2-
1))+1/(2(1-vm)) (1 - 2vm +3/(r^2-1)) CoefG;
TenseurEsh[[1, 1, 3, 3]]=TenseurEsh[[1, 1, 2, 2]];
TenseurEsh[[2, 3, 2, 3]]=(1/(4(1-vm)))(r^2/(2(r^2-1)))+(1 -
2vm -3/(4(r^2-1))) CoefG);
TenseurEsh[[3, 2, 3, 2]]=TenseurEsh[[2, 3, 2, 3]];
TenseurEsh[[1, 2, 1, 2]]=(1/(4(1-vm)))(1 - 2vm - (r^2+1)/(r^2-
1)-1/2 (1 - 2vm -(3(r^2+1))/(r^2-1)) CoefG);
TenseurEsh[[1, 3, 1, 3]]=TenseurEsh[[3, 2, 3, 2]];
(*Symétrie mineure*)
TenseurEsh[[3, 2, 2, 3]]= TenseurEsh[[2, 3, 2, 3]];
TenseurEsh[[2, 3, 3, 2]]= TenseurEsh[[2, 3, 2, 3]];
TenseurEsh[[3, 2, 3, 2]]= TenseurEsh[[2, 3, 2, 3]];

TenseurEsh[[2, 1, 1, 2]]=TenseurEsh[[1, 2, 1, 2]];
TenseurEsh[[1, 2, 2, 1]]=TenseurEsh[[1, 2, 1, 2]];
TenseurEsh[[2, 1, 2, 1]]=TenseurEsh[[1, 2, 1, 2]];

TenseurEsh[[3, 1, 1, 3]]=TenseurEsh[[1, 3, 1, 3]];
TenseurEsh[[1, 3, 3, 1]]=TenseurEsh[[1, 3, 1, 3]];
TenseurEsh[[3, 1, 3, 1]]=TenseurEsh[[1, 3, 1, 3]];

Print[" Tenseur de concentration d'Eshelby"];
TenseurEsh//MatrixForm

```

```

TenseurP =TensorContract[TensorProduct[TenseurEsh,
TenseurSmin], {{3,5},{4,6}} ];

Print[" Tenseur de polarisation de Hill pour borne min"];
TenseurP//MatrixForm

(*Détermination de la décomposition du Tenseur P*)
VecteurE3={1,0,0};
TenseurEL=TensorProduct[VecteurE3,VecteurE3,VecteurE3,VecteurE
3];
MatrixiT=IdentityMatrix[3]-TensorProduct[VecteurE3,VecteurE3];
TenseurJT=1/2 TensorProduct[MatrixiT, MatrixiT];
TenseurIT=Table[0, {i,1,3}, {j, 1,3},{k, 1,3},{l, 1,3}];
TenseurIT[[3,3,3,3]]=1;
TenseurIT[[2,2,2,2]]=1;
TenseurIT[[3,2,3,2]]=1/2;
TenseurIT[[3,2,2,3]]=TenseurIT[[3,2,3,2]];
TenseurIT[[2,3,3,2]]=TenseurIT[[3,2,3,2]];
TenseurIT[[2,3,2,3]]=TenseurIT[[3,2,3,2]];
TenseurKE=1/6 TensorProduct[(2
TensorProduct[VecteurE3,VecteurE3]-MatrixiT), (2
TensorProduct[VecteurE3,VecteurE3]-MatrixiT)];
TenseurF= Sqrt[2]/2 TensorProduct[MatrixiT, VecteurE3,
VecteurE3];
TenseurKT= TenseurIT - TenseurJT;
TenseurKL =TenseurK-TenseurKT-TenseurKE;
TenseurFT=TensorTranspose[TenseurF, {3,4,1,2}];

Print["Affichage des tenseurs orthogonaux de décomposition de
P"];
(*TenseurEL//MatrixForm
MatrixiT//MatrixForm
TenseurJT//MatrixForm
TenseurIT//MatrixForm
TenseurKE//MatrixForm
TenseurKL//MatrixForm
TenseurKT//MatrixForm
TenseurF//MatrixForm
TenseurFT//MatrixForm*)
coef→=TensorContract[TensorProduct[TenseurEL,TenseurP],{{1,7},
{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef↕=TensorContract[TensorProduct[TenseurJT,TenseurP],{{1,7},
{3,5},{4,6},{2,8}}];

```

```

coef•=TensorContract[TensorProduct[TenseurFT,TenseurP],{{1,7},{
3,5},{4,6},{2,8}}];
coef•p=TensorContract[TensorProduct[TenseurF,TenseurP],{{1,7},{
3,5},{4,6},{2,8}}];
coefO=(1/2)
TensorContract[TensorProduct[TenseurKT,TenseurP],{{1,7},{3,5},
{4,6},{2,8}}];
coefOp=(1/2)
TensorContract[TensorProduct[TenseurKL,TenseurP],{{1,7},{3,5},
{4,6},{2,8}}];
coef→c=coef↕/(coef→ coef↕-coef•^2);
coef↕c=coef→/(coef→ coef↕-coef•^2);
coef•c=- coef•/(coef→ coef↕-coef•^2);
coef•pc=- coef•/(coef→ coef↕-coef•^2);
coefOc=1/coefO;
coefOpc=1/coefOp;

Print["Affichage du tenseur P de Hill et de son inverse après
reconstitution"]
TenseurP = coef→ TenseurEL + coef↕ TenseurJT + coef• TenseurF
+ coef•p TenseurFT + coefO TenseurKT + coefOp TenseurKL;
TenseurPinv = coef→c TenseurEL + coef↕c TenseurJT + coef•c
TenseurF + coef•pc TenseurFT + coefOc TenseurKT + coefOpc
TenseurKL;
TenseurP//MatrixForm
TenseurPinv//MatrixForm

(*Calcul du tenseur d'influence de Hill*)
Print["Affichage du Tenseur CminStar"]
TenseurCminStar=TenseurPinv-TenseurCmin;
TenseurCminStar//MatrixForm

Print["Les sommes du tenseur de Hill avec chacun des tenseurs
Cm et Cc "]
TenseurCminStarCm=TenseurCminStar+TenseurCm;
TenseurCminStarCc=TenseurCminStar+TenseurCc;
TenseurCminStarCm//MatrixForm;

```

```

TenseurCminStarCc//MatrixForm;

Print["Affichage du tenseur (TenseurCminStar + Cc) et de son
inverse "]
coef $\rightarrow$ 3=TensorContract[TensorProduct[TenseurEL,TenseurCminStarC
c],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef $\updownarrow$ 3=TensorContract[TensorProduct[TenseurJT,TenseurCminStarC
c],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef $\bullet$ 3=TensorContract[TensorProduct[TenseurFT,TenseurCminStarCc
],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef $\bullet$ p3=TensorContract[TensorProduct[TenseurF,TenseurCminStarCc
],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coefO3=1/2
TensorContract[TensorProduct[TenseurKT,TenseurCminStarCc],{{1,
7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coefOp3=1/2
TensorContract[TensorProduct[TenseurKL,TenseurCminStarCc],{{1,
7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef $\rightarrow$ c3=coef $\updownarrow$ 3/(coef $\rightarrow$ 3 coef $\updownarrow$ 3-coef $\bullet$ 3^2);
coef $\updownarrow$ c3=coef $\rightarrow$ 3/(coef $\rightarrow$ 3 coef $\updownarrow$ 3-coef $\bullet$ 3^2);
coef $\bullet$ c3=- coef $\bullet$ 3/(coef $\rightarrow$ 3 coef $\updownarrow$ 3-coef $\bullet$ 3^2);
coef $\bullet$ pc3=- coef $\bullet$ 3/(coef $\rightarrow$ 3 coef $\updownarrow$ 3-coef $\bullet$ 3^2);
coefOc3=1/coefO3;
coefOpc3=1/coefOp3;
TenseurCminStarCc = coef $\rightarrow$ 3 TenseurEL + coef $\updownarrow$ 3 TenseurJT +
coef $\bullet$ 3 TenseurF + coef $\bullet$ p3 TenseurFT + coefO3 TenseurKT +
coefOp3 TenseurKL;
TenseurCminStarCcinv = coef $\rightarrow$ c3 TenseurEL + coef $\updownarrow$ c3 TenseurJT +
coef $\bullet$ c3 TenseurF + coef $\bullet$ pc3 TenseurFT + coefOc3 TenseurKT +
coefOpc3 TenseurKL;

TenseurCminStarCc//MatrixForm;
TenseurCminStarCcinv//MatrixForm;

```

```

Print["Affichage du tenseur (TenseurCminStar + Cm) et de son
inverse "]
coef $\rightarrow$ 4=TensorContract[TensorProduct[TenseurEL,TenseurCminStarC
m],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef $\updownarrow$ 4=TensorContract[TensorProduct[TenseurJT,TenseurCminStarC
m],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef $\bullet$ 4=TensorContract[TensorProduct[TenseurFT,TenseurCminStarCm
],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef $\bullet$ p4=TensorContract[TensorProduct[TenseurF,TenseurCminStarCm
],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coefO4=1/2
TensorContract[TensorProduct[TenseurKT,TenseurCminStarCm],{{1,
7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coefOp4=1/2
TensorContract[TensorProduct[TenseurKL,TenseurCminStarCm],{{1,
7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef $\rightarrow$ c4=coef $\updownarrow$ 4/(coef $\rightarrow$ 4 coef $\updownarrow$ 4-coef $\bullet$ 4^2);
coef $\updownarrow$ c4=coef $\rightarrow$ 4/(coef $\rightarrow$ 4 coef $\updownarrow$ 4-coef $\bullet$ 4^2);
coef $\bullet$ c4=- coef $\bullet$ 4/(coef $\rightarrow$ 4 coef $\updownarrow$ 4-coef $\bullet$ 4^2);
coef $\bullet$ pc4=- coef $\bullet$ 4/(coef $\rightarrow$ 4 coef $\updownarrow$ 4-coef $\bullet$ 4^2);
coefOc4=1/coefO4;
coefOpc4=1/coefOp4;
TenseurCminStarCm = coef $\rightarrow$ 4 TenseurEL + coef $\updownarrow$ 4 TenseurJT +
coef $\bullet$ 4 TenseurF + coef $\bullet$ p4 TenseurFT + coefO4 TenseurKT +
coefOp4 TenseurKL;
TenseurCminStarCminv = coef $\rightarrow$ c4 TenseurEL + coef $\updownarrow$ c4 TenseurJT +
coef $\bullet$ c4 TenseurF + coef $\bullet$ pc4 TenseurFT + coefOc4 TenseurKT +
coefOpc4 TenseurKL;

TenseurCminStarCm//MatrixForm;
TenseurCminStarCminv//MatrixForm;

Print["Affichage des TenseurAAA=Tenseur [Vm(Cmin*+Cm)^-
1+Vc(Cmin*+Cc)^-1] et de son inverse"]
TenseurAAA=(1-f)*TenseurCminStarCminv+f*TenseurCminStarCcinv;

```

```

coefH→6=TensorContract[TensorProduct[TenseurEL,TenseurAAA],{{1,
7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef↑6=TensorContract[TensorProduct[TenseurJT,TenseurAAA],{{1,
7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef•6=TensorContract[TensorProduct[TenseurFT,TenseurAAA],{{1,7
},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef•p6=TensorContract[TensorProduct[TenseurF,TenseurAAA],{{1,7
},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coefO6=1/2
TensorContract[TensorProduct[TenseurKT,TenseurAAA],{{1,7},{3,5
},{4,6},{2,8}}];
coefOp6=1/2
TensorContract[TensorProduct[TenseurKL,TenseurAAA],{{1,7},{3,5
},{4,6},{2,8}}];
coefH→c6=coef↑6/(coefH→6 coef↑6-coef•6^2);
coef↑c6=coefH→6/(coefH→6 coef↑6-coef•6^2);
coef•c6=- coef•6/(coefH→6 coef↑6-coef•6^2);
coef•pc6=- coef•6/(coefH→6 coef↑6-coef•6^2);
coefOc6=1/coefO6;
coefOpc6=1/coefOp6;

TenseurAAA = coefH→6 TenseurEL + coef↑6 TenseurJT + coef•6
TenseurF + coef•p6 TenseurFT + coefO6 TenseurKT + coefOp6
TenseurKL;
TenseurAAAinv= coefH→c6 TenseurEL + coef↑c6 TenseurJT + coef•c6
TenseurF + coef•pc6 TenseurFT + coefOc6 TenseurKT + coefOpc6
TenseurKL;
TenseurAAA//MatrixForm;
TenseurAAAinv//MatrixForm;
Print["Borne inférieure de Hashin-Strikman unidirectionnelle"]

TenseurHashinInf=TensorContract[TensorProduct[((1-
f)TensorContract[TensorProduct[TenseurCm,TenseurCminStarCminv]
,{{3,5},{4,6}}]+ f
TensorContract[TensorProduct[TenseurCc,TenseurCminStarCcinv],{
{3,5},{4,6}}]),TenseurAAAinv],{{3,5},{4,6}}];

```

```

TenseurHashinInf//MatrixForm

Print["Tenseur d'orientation a2 et détermination de a4"]
a2={{1/3,0,0},{0,1/3,0},{0,0,1/3}};
Id={{1,0,0},{0,1,0},{0,0,1}};
a4=Table[(-
1/35)*(Id[[i,j]]*Id[[k,l]]+Id[[i,k]]*Id[[j,l]]+Id[[i,l]]*Id[[j
,k]])+(1/7)*(a2[[i,j]]*Id[[k,l]]+a2[[i,k]]*Id[[j,l]]+a2[[i,l]]
*Id[[j,k]]+a2[[k,l]]*Id[[i,j]]+a2[[j,l]]*Id[[i,k]]+a2[[j,k]]*I
d[[i,l]]),{i, 1,3},{j,1,3},{k,1,3},{l,1,3}];
a4=TensorProduct[a2, a2];
a2//MatrixForm
a4//MatrixForm

Print["Calcul des constantes B de la borne inférieure"]

Hsi=TenseurHashinInf;
B1i=Hsi[[1, 1, 1, 1]]+Hsi[[2, 2, 2, 2]]-2*Hsi[[1, 1, 2, 2]]-
4*Hsi[[1, 2, 1, 2]];
B2i=Hsi[[1, 1, 2, 2]]-Hsi[[2, 2, 3, 3]];
B3i=Hsi[[1, 2, 1, 2]]+0.5*(Hsi[[2, 2, 3, 3]]-Hsi[[2, 2, 2,
2]]);
B4i=Hsi[[2, 2, 3, 3]];
B5i=1/2*(Hsi[[2, 2, 2, 2]]-Hsi[[2, 2, 3, 3]])

Print["Tenseur de rigidité effective du composite : borne
inférieure"]
Ti=Table[B1i*a4[[i, j, k,
l]]+B2i(a2[[i,j]]*Id[[k,l]]+a2[[k,l]]*Id[[i,j]])+B3i*(a2[[i,k]
]*Id[[j,l]]+a2[[i,l]]*Id[[j,k]]+a2[[j,l]]*Id[[i,k]]+a2[[j,k]]*
Id[[i,l]])+B4i*Id[[i,j]]*Id[[k,l]]+B5i*(Id[[i,k]]*Id[[j,l]]+Id
[[i,l]]*Id[[j,k]]),{i,1,3},{j,1,3},{k,1,3},{l,1,3}];
Ti//MatrixForm

Print["Les constantes de LAME lambda et mu sont données par :
"]
Lbdi=Ti[[1, 1, 2, 2]]
Mui=Ti[[1, 2, 1, 2]]
Print["Les caracteristiques mecaniques : E et upsilon sont :
"]
Myi=Mui*(3*Lbdi+2*Mui)/(Lbdi+Mui)
pi=((1/2) Lbdi)/(Lbdi+Mui)

```

Upper Bound of Hashin Strikman

```

f=0.80
Em=2.518;
Ec=73.08;
vm=0.413;
vc=0.172;
r=3.018;

(*Valeur des coefficients km kc  $\bar{\nu}_m$  et  $\bar{\nu}_c$  *)
km=Em/(3(1-2vm));
 $\bar{\nu}_m$ =Em/(2(1+vm));
kc=Ec/(3(1-2vc));
 $\bar{\nu}_c$ =Ec/(2(1+vc));

 $\ell_m$ =(Em vm)/((1+vm) (1-2vm));
 $\ell_c$ =(Ec vc)/((1+vc) (1-2vc));

TenseurI=Table[1/2 (KroneckerDelta[i, k]
KroneckerDelta[j,l]+KroneckerDelta[i,l] KroneckerDelta[j,k]),
{i, 1,3},{j, 1,3},{k, 1,3},{l, 1,3}];
TenseurJ=1/3 TensorProduct[IdentityMatrix[3],
IdentityMatrix[3]];
TenseurK= TenseurI - TenseurJ;
TenseurCm= 3km TenseurJ + 2 $\bar{\nu}_m$  TenseurK;
TenseurCc= 3kc TenseurJ + 2 $\bar{\nu}_c$  TenseurK;

TenseurI//MatrixForm;
TenseurJ//MatrixForm;
TenseurK//MatrixForm;
Print["Tenseurs Cm et Cc"]
TenseurCm//MatrixForm
TenseurCc//MatrixForm
MatrixCm = ({
    { $\ell_m+2\bar{\nu}_m$ ,  $\ell_m$ ,  $\ell_m$ , 0, 0, 0},
    { $\ell_m$ ,  $\ell_m+2\bar{\nu}_m$ ,  $\ell_m$ , 0, 0, 0},
    { $\ell_m$ ,  $\ell_m$ ,  $\ell_m+2\bar{\nu}_m$ , 0, 0, 0},
    {0, 0, 0,  $\bar{\nu}_m$ , 0, 0},
    {0, 0, 0, 0,  $\bar{\nu}_m$ , 0},
    {0, 0, 0, 0, 0,  $\bar{\nu}_m$ }
});
MatrixCc = ({
    { $\ell_c+2\bar{\nu}_c$ ,  $\ell_c$ ,  $\ell_c$ , 0, 0, 0},

```

```

        {lc, lc+2 $\mp$ c, lc, 0, 0, 0},
        {lc, lc, lc+2 $\mp$ c, 0, 0, 0},
        {0, 0, 0,  $\mp$ c, 0, 0},
        {0, 0, 0, 0,  $\mp$ c, 0},
        {0, 0, 0, 0, 0,  $\mp$ c}
    });
(*MatrixCm//MatrixForm
MatrixCc//MatrixForm*)
(*Calcul de l'inverse des tenseurs*)

TenseurSm = 1/(3km) TenseurJ +1/(2 $\mp$ m) TenseurK;
TenseurSc = 1/(3kc) TenseurJ +1/(2 $\mp$ c) TenseurK;
Print["Tenseurs de souplesse Sm et Sc"];
TenseurSm//MatrixForm
TenseurSc//MatrixForm

(*MatrixSm=Inverse[MatrixCm];
MatrixSc=Inverse[MatrixCc];
MatrixSm//MatrixForm
MatrixSc//MatrixForm*)

TenseurCmax= 3 Max[km, kc] TenseurJ + 2 Max[ $\mp$ m,  $\mp$ c] TenseurK;
TenseurCmin=3 Min[km, kc] TenseurJ + 2 Min[ $\mp$ m,  $\mp$ c] TenseurK;
TenseurSmax= 1/(3 Max[km, kc]) TenseurJ + 1/(2 Max[ $\mp$ m,  $\mp$ c])
TenseurK;
TenseurSmin= 1/(3 Min[km, kc]) TenseurJ + 1/(2 Min[ $\mp$ m,  $\mp$ c])
TenseurK;
Print["Tenseurs de rigidité et de souplesses des matériaux le
plus rigide et le plus souple Cmax ET Cmin"]
TenseurCmax//MatrixForm
TenseurCmin//MatrixForm
TenseurSmax//MatrixForm
TenseurSmin//MatrixForm
(*Entrée du tenseur de concentration d'Eshelby pour inclusion
ellipsoïdale de révolution*)

CoefG = r/(r^2-1)^(3/2) (r (r^2-1)^(1/2)- ArcCosh[r])
TenseurEsh=Table[0, {i, 1, 3}, {j, 1, 3}, {k, 1, 3}, {l, 1,
3}];

```

```

TenseurEsh[[1, 1, 1, 1]]=1/(2(1-vm))*(1 - 2vm +(3r^2-1)/(r^2-1)-(1 - 2vm +(3r^2)/(r^2-1))*CoefG);
TenseurEsh[[2, 2, 2, 2]]=(3/(8(1-vm)))(r^2/(r^2-1))+1/(4(1-vm))(1 - 2vm - 9/(4(r^2-1))) CoefG;
TenseurEsh[[3, 3, 3, 3]] = TenseurEsh[[2, 2, 2, 2]];
TenseurEsh[[2, 2, 3, 3]] = 1/(4(1-vm))(r^2/(2(r^2-1)) -(1 - 2vm + 3/(4(r^2-1))) CoefG);
TenseurEsh[[3, 3, 2, 2]]= TenseurEsh[[2, 2, 3, 3]];
TenseurEsh[[2, 2, 1, 1]] = -(1/(2(1-vm)))(r^2/(r^2-1))+1/(4(1-vm))((3r^2)/(r^2-1)-(1 - 2vm )) CoefG;
TenseurEsh[[3, 3, 1, 1]]=TenseurEsh[[2, 2, 1, 1]];
TenseurEsh[[1, 1, 2, 2]] = -(1/(2(1-vm)))(1 - 2vm +1/(r^2-1))+1/(2(1-vm))(1 - 2vm +3/(r^2-1)) CoefG;
TenseurEsh[[1, 1, 3, 3]]=TenseurEsh[[1, 1, 2, 2]];
TenseurEsh[[2, 3, 2, 3]] = (1/(4(1-vm)))(r^2/(2(r^2-1))+(1 - 2vm -3/(4(r^2-1))) CoefG);
TenseurEsh[[3, 2, 3, 2]]=TenseurEsh[[2, 3, 2, 3]];
TenseurEsh[[1, 2, 1, 2]]=(1/(4(1-vm)))(1 - 2vm - (r^2+1)/(r^2-1)-1/2 (1 - 2vm -(3(r^2+1))/(r^2-1)) CoefG);
TenseurEsh[[1, 3, 1, 3]]=TenseurEsh[[3, 2, 3, 2]];
(*Symétrie mineure*)
TenseurEsh[[3, 2, 2, 3]]= TenseurEsh[[2, 3, 2, 3]];
TenseurEsh[[2, 3, 3, 2]]= TenseurEsh[[2, 3, 2, 3]];
TenseurEsh[[3, 2, 3, 2]]= TenseurEsh[[2, 3, 2, 3]];

TenseurEsh[[2, 1, 1, 2]]=TenseurEsh[[1, 2, 1, 2]];
TenseurEsh[[1, 2, 2, 1]]=TenseurEsh[[1, 2, 1, 2]];
TenseurEsh[[2, 1, 2, 1]]=TenseurEsh[[1, 2, 1, 2]];

TenseurEsh[[3, 1, 1, 3]]=TenseurEsh[[1, 3, 1, 3]];
TenseurEsh[[1, 3, 3, 1]]=TenseurEsh[[1, 3, 1, 3]];
TenseurEsh[[3, 1, 3, 1]]=TenseurEsh[[1, 3, 1, 3]];

Print[" Tenseur de concentration d'Eshelby"];
TenseurEsh//MatrixForm
TenseurP =TensorContract[TensorProduct[TenseurEsh,
TenseurSmax], {{3,5},{4,6}} ];

Print[" Tenseur de polarisation de Hill pour borne max"];
TenseurP//MatrixForm

(*Détermination de la décomposition du Tenseur P*)
VecteurE3={1,0,0};

```

```

TenseurEL=TensorProduct[VecteurE3,VecteurE3,VecteurE3,VecteurE
3];
MatrixiT=IdentityMatrix[3]-TensorProduct[VecteurE3,VecteurE3];
TenseurJT=1/2 TensorProduct[MatrixiT, MatrixiT];
TenseurIT=Table[0, {i,1,3}, {j, 1,3},{k, 1,3},{l, 1,3}];
TenseurIT[[3,3,3,3]]=1;
TenseurIT[[2,2,2,2]]=1;
TenseurIT[[3,2,3,2]]=1/2;
TenseurIT[[3,2,2,3]]=TenseurIT[[3,2,3,2]];
TenseurIT[[2,3,3,2]]=TenseurIT[[3,2,3,2]];
TenseurIT[[2,3,2,3]]=TenseurIT[[3,2,3,2]];
TenseurKE=1/6 TensorProduct[(2
TensorProduct[VecteurE3,VecteurE3]-MatrixiT), (2
TensorProduct[VecteurE3,VecteurE3]-MatrixiT)];
TenseurF= Sqrt[2]/2 TensorProduct[MatrixiT, VecteurE3,
VecteurE3];
TenseurKT= TenseurIT - TenseurJT;
TenseurKL =TenseurK-TenseurKT-TenseurKE;
TenseurFT=TensorTranspose[TenseurF, {3,4,1,2}];

Print["Affichage des tenseurs orthogonaux de décomposition de
P"];
(*TenseurEL//MatrixForm
MatrixiT//MatrixForm
TenseurJT//MatrixForm
TenseurIT//MatrixForm
TenseurKE//MatrixForm
TenseurKL//MatrixForm
TenseurKT//MatrixForm
TenseurF//MatrixForm
TenseurFT//MatrixForm*)
coef $\rightarrow$ =TensorContract[TensorProduct[TenseurEL,TenseurP],{{1,7},
{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef $\Uparrow$ =TensorContract[TensorProduct[TenseurJT,TenseurP],{{1,7},
{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef $\bullet$ =TensorContract[TensorProduct[TenseurFT,TenseurP],{{1,7},{
3,5},{4,6},{2,8}}];
coef $\bullet$ p=TensorContract[TensorProduct[TenseurF,TenseurP],{{1,7},{
3,5},{4,6},{2,8}}];
coefO=(1/2)
TensorContract[TensorProduct[TenseurKT,TenseurP],{{1,7},{3,5},
{4,6},{2,8}}];

```

```

coefOp=(1/2)
TensorContract[TensorProduct[TenseurKL,TenseurP],{{1,7},{3,5},
{4,6},{2,8}}];
coef→c=coef↕/(coef→ coef↕-coef.^2);
coef↕c=coef→/(coef→ coef↕-coef.^2);
coef.c=- coef./(coef→ coef↕-coef.^2);
coef.pc=- coef./(coef→ coef↕-coef.^2);
coefOc=1/coefO;
coefOpc=1/coefOp;

Print["Affichage du tenseur P de Hill et de son inverse après
reconstitution"]
TenseurP = coef→ TenseurEL + coef↕ TenseurJT + coef.c TenseurF
+ coef.p TenseurFT + coefO TenseurKT + coefOp TenseurKL;
TenseurPinv = coef→c TenseurEL + coef↕c TenseurJT + coef.c
TenseurF + coef.pc TenseurFT + coefOc TenseurKT + coefOpc
TenseurKL;
TenseurP//MatrixForm
TenseurPinv//MatrixForm

(*Calcul du tenseur d'influence de Hill*)
Print["Affichage du Tenseur CmaxStar"]
TenseurCmaxStar=TenseurPinv-TenseurCmax;
TenseurCmaxStar//MatrixForm

Print["Les sommes du tenseur de Hill avec chacun des tenseurs
Cm et Cc "]
TenseurCmaxStarCm=TenseurCmaxStar+TenseurCm;
TenseurCmaxStarCc=TenseurCmaxStar+TenseurCc;
TenseurCmaxStarCm//MatrixForm;
TenseurCmaxStarCc//MatrixForm;

Print["Affichage du tenseur (TenseurCmaxStar + Cc) et de son
inverse "]
coef→3=TensorContract[TensorProduct[TenseurEL,TenseurCmaxStarC
c],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef↕3=TensorContract[TensorProduct[TenseurJT,TenseurCmaxStarC
c],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];

```

```

coef•3=TensorContract[TensorProduct[TenseurFT,TenseurCmaxStarCc
],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef•p3=TensorContract[TensorProduct[TenseurF,TenseurCmaxStarCc
],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coefO3=1/2
TensorContract[TensorProduct[TenseurKT,TenseurCmaxStarCc],{{1,
7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coefOp3=1/2
TensorContract[TensorProduct[TenseurKL,TenseurCmaxStarCc],{{1,
7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef↦c3=coef↕3/(coef↦3 coef↕3-coef•3^2);
coef↕c3=coef↦3/(coef↦3 coef↕3-coef•3^2);
coef•c3=- coef•3/(coef↦3 coef↕3-coef•3^2);
coef•pc3=- coef•3/(coef↦3 coef↕3-coef•3^2);
coefOc3=1/coefO3;
coefOpc3=1/coefOp3;
TenseurCmaxStarCc = coef↦3 TenseurEL + coef↕3 TenseurJT +
coef•3 TenseurF + coef•p3 TenseurFT + coefO3 TenseurKT +
coefOp3 TenseurKL;
TenseurCmaxStarCcinv = coef↦c3 TenseurEL + coef↕c3 TenseurJT +
coef•c3 TenseurF + coef•pc3 TenseurFT + coefOc3 TenseurKT +
coefOpc3 TenseurKL;

TenseurCmaxStarCc//MatrixForm;
TenseurCmaxStarCcinv//MatrixForm;

Print["Affichage du tenseur (TenseurCmaxStar + Cm) et de son
inverse "]
coef↦4=TensorContract[TensorProduct[TenseurEL,TenseurCmaxStarC
m],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef↕4=TensorContract[TensorProduct[TenseurJT,TenseurCmaxStarC
m],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef•4=TensorContract[TensorProduct[TenseurFT,TenseurCmaxStarCm
],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];

```

```

coef•p4=TensorContract[TensorProduct[TenseurF,TenseurCmaxStarCm],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coefO4=1/2
TensorContract[TensorProduct[TenseurKT,TenseurCmaxStarCm],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coefOp4=1/2
TensorContract[TensorProduct[TenseurKL,TenseurCmaxStarCm],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef↦c4=coef↕4/(coef↦4 coef↕4-coef•4^2);
coef↕c4=coef↦4/(coef↦4 coef↕4-coef•4^2);
coef•c4=- coef•4/(coef↦4 coef↕4-coef•4^2);
coef•pc4=- coef•4/(coef↦4 coef↕4-coef•4^2);
coefOc4=1/coefO4;
coefOpc4=1/coefOp4;
TenseurCmaxStarCm = coef↦4 TenseurEL + coef↕4 TenseurJT +
coef•4 TenseurF + coef•p4 TenseurFT + coefO4 TenseurKT +
coefOp4 TenseurKL;
TenseurCmaxStarCminv = coef↦c4 TenseurEL + coef↕c4 TenseurJT +
coef•c4 TenseurF + coef•pc4 TenseurFT + coefOc4 TenseurKT +
coefOpc4 TenseurKL;

TenseurCmaxStarCm//MatrixForm;
TenseurCmaxStarCminv//MatrixForm;

Print["Affichage des TenseurAAA=Tenseur [Vm(Cmax*+Cm)^-1+Vc(Cmax*+Cc)^-1] et de son inverse"]
TenseurAAA=(1-f)*TenseurCmaxStarCminv+f*TenseurCmaxStarCcinv;

coef↦6=TensorContract[TensorProduct[TenseurEL,TenseurAAA],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef↕6=TensorContract[TensorProduct[TenseurJT,TenseurAAA],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef•6=TensorContract[TensorProduct[TenseurFT,TenseurAAA],{{1,7},{3,5},{4,6},{2,8}}];

```

```

coef.p6=TensorContract[TensorProduct[TenseurF,TenseurAAA],{{1,7},
,{3,5},{4,6},{2,8}}];
coefO6=1/2
TensorContract[TensorProduct[TenseurKT,TenseurAAA],{{1,7},{3,5},
,{4,6},{2,8}}];
coefOp6=1/2
TensorContract[TensorProduct[TenseurKL,TenseurAAA],{{1,7},{3,5},
,{4,6},{2,8}}];
coef→c6=coef↕6/(coef→6 coef↕6-coef.6^2);
coef↕c6=coef→6/(coef→6 coef↕6-coef.6^2);
coef.c6=- coef.6/(coef→6 coef↕6-coef.6^2);
coef.pc6=- coef.6/(coef→6 coef↕6-coef.6^2);
coefOc6=1/coefO6;
coefOpc6=1/coefOp6;
TenseurAAA = coef→6 TenseurEL + coef↕6 TenseurJT + coef.6
TenseurF + coef.p6 TenseurFT + coefO6 TenseurKT + coefOp6
TenseurKL;
TenseurAAAinv= coef→c6 TenseurEL + coef↕c6 TenseurJT + coef.c6
TenseurF + coef.pc6 TenseurFT + coefOc6 TenseurKT + coefOpc6
TenseurKL;
TenseurAAA//MatrixForm;
TenseurAAAinv//MatrixForm;
Print["Borne inférieure de Hashin-Strikman unidirectionnelle"]

TenseurHashinInf=TensorContract[TensorProduct[((1-
f)TensorContract[TensorProduct[TenseurCm,TenseurCmaxStarCminv]
,{{3,5},{4,6}}]+ f
TensorContract[TensorProduct[TenseurCc,TenseurCmaxStarCcinv],{
{3,5},{4,6}}]),TenseurAAAinv],{{3,5},{4,6}}];
TenseurHashinInf//MatrixForm

Print["Tenseur d'orientation a2 et détermination de a4"]
a2={{1/3,0,0},{0,1/3,0},{0,0,1/3}};
Id={{1,0,0},{0,1,0},{0,0,1}};
a4=Table[(-
1/35)*(Id[[i,j]]*Id[[k,1]]+Id[[i,k]]*Id[[j,1]]+Id[[i,1]]*Id[[j
,k]])+(1/7)*(a2[[i,j]]*Id[[k,1]]+a2[[i,k]]*Id[[j,1]]+a2[[i,1]]

```

```

*Id[[j,k]]+a2[[k,1]]*Id[[i,j]]+a2[[j,1]]*Id[[i,k]]+a2[[j,k]]*I
d[[i,1]]),{i, 1,3},{j,1,3},{k,1,3},{1,1,3}];
a4=TensorProduct[a2, a2];
a2//MatrixForm
a4//MatrixForm

Print["Calcul des constantes B de la borne inférieure"]

Hsi=TenseurHashinInf;
B1i=Hsi[[1, 1, 1, 1]]+Hsi[[2, 2, 2, 2]]-2*Hsi[[1, 1, 2, 2]]-
4*Hsi[[1, 2, 1, 2]];
B2i=Hsi[[1, 1, 2, 2]]-Hsi[[2, 2, 3, 3]];
B3i=Hsi[[1, 2, 1, 2]]+0.5*(Hsi[[2, 2, 3, 3]]-Hsi[[2, 2, 2,
2]]);
B4i=Hsi[[2, 2, 3, 3]];
B5i=1/2*(Hsi[[2, 2, 2, 2]]-Hsi[[2, 2, 3, 3]])

Print["Tenseur de rigidité effective du composite : borne
inférieure"]
Ti=Table[B1i*a4[[i, j, k,
l]]+B2i*(a2[[i,j]]*Id[[k,1]]+a2[[k,1]]*Id[[i,j]])+B3i*(a2[[i,k]
]*Id[[j,1]]+a2[[i,1]]*Id[[j,k]]+a2[[j,1]]*Id[[i,k]]+a2[[j,k]]*
Id[[i,1]])+B4i*Id[[i,j]]*Id[[k,1]]+B5i*(Id[[i,k]]*Id[[j,1]]+Id
[[i,1]]*Id[[j,k]]),{i,1,3},{j,1,3},{k,1,3},{1,1,3}];
Ti//MatrixForm

Print["Les constantes de LAME lambda et mu sont données par :
"]
Lbdi=Ti[[1, 1, 2, 2]]
Mui=Ti[[1, 2, 1, 2]]
Print["Les caracteristiques mecaniques : E et upsilon sont :
"]
Myi=Mui*(3*Lbdi+2*Mui)/(Lbdi+Mui)

pi=((1/2) Lbdi)/(Lbdi+Mui)

```

Mori-Tanaka's model of estimation

```

f=0.80
Em=2.518;
Ec=73.08;
vm=0.413;
vc=0.172;
r=3.018;

(*Valeur des coefficients km kc ̄m et ̄c *)

```

```

km=Em/(3(1-2vm));
¶m=Em/(2(1+vm));
kc=Ec/(3(1-2vc));
¶c=Ec/(2(1+vc));

ℓm=(Em vm)/((1+vm) (1-2vm));
ℓc=(Ec vc)/((1+vc) (1-2vc));

TenseurI=Table[1/2 (KroneckerDelta[i, k]
KroneckerDelta[j,l]+KroneckerDelta[i,l] KroneckerDelta[j,k]),
{i, 1,3},{j, 1,3},{k, 1,3},{l, 1,3}];
TenseurJ=1/3 TensorProduct[IdentityMatrix[3],
IdentityMatrix[3]];
TenseurK= TenseurI - TenseurJ;
TenseurCm= 3km TenseurJ + 2¶m TenseurK;
TenseurCc= 3kc TenseurJ + 2¶c TenseurK;

TenseurI//MatrixForm;
TenseurJ//MatrixForm;
TenseurK//MatrixForm;
Print["Tenseurs Cm et Cc"]
TenseurCm//MatrixForm
TenseurCc//MatrixForm
(*MatrixCm = ({
{ℓm+2¶m, ℓm, ℓm, 0, 0, 0},
{ℓm, ℓm+2¶m, ℓm, 0, 0, 0},
{ℓm, ℓm, ℓm+2¶m, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, ¶m, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, ¶m, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, ¶m}
});
MatrixCc = ({
{ℓc+2¶c, ℓc, ℓc, 0, 0, 0},
{ℓc, ℓc+2¶c, ℓc, 0, 0, 0},
{ℓc, ℓc, ℓc+2¶c, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, ¶c, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, ¶c, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, ¶c}

```

```

});
MatrixCm//MatrixForm
MatrixCc//MatrixForm*)
(*Calcul de l'inverse des tenseurs*)

TenseurSm = 1/(3km) TenseurJ +1/(2 $\nu$ m) TenseurK;
TenseurSc = 1/(3kc) TenseurJ +1/(2 $\nu$ c) TenseurK;
Print["Tenseurs de souplesse Sm et Sc"];
TenseurSm//MatrixForm
TenseurSc//MatrixForm

(*MatrixSm=Inverse[MatrixCm];
MatrixSc=Inverse[MatrixCc];
MatrixSm//MatrixForm
MatrixSc//MatrixForm*)

TenseurCmax= 3 Max[km, kc] TenseurJ + 2 Max[ $\nu$ m,  $\nu$ c] TenseurK;
TenseurCmin=3 Min[km, kc] TenseurJ + 2 Min[ $\nu$ m,  $\nu$ c] TenseurK;
TenseurSmax= 1/(3 Max[km, kc]) TenseurJ + 1/(2 Max[ $\nu$ m,  $\nu$ c])
TenseurK;
TenseurSmin= 1/(3 Min[km, kc]) TenseurJ + 1/(2 Min[ $\nu$ m,  $\nu$ c])
TenseurK;
Print["Tenseurs de rigidité et de souplesses des matériaux le
plus rigide et le plus souple Cmax ET Cmin"]
TenseurCmax//MatrixForm
TenseurCmin//MatrixForm
TenseurSmax//MatrixForm
TenseurSmin//MatrixForm
(*Entrée du tenseur de concentration d'Eshelby pour inclusion
ellipsoïdale de révolution*)

CoefG = r/(r^2-1)^(3/2) (r (r^2-1)^(1/2)- ArcCosh[r])
TenseurEsh=Table[0, {i, 1, 3}, {j, 1, 3}, {k, 1, 3}, {l, 1,
3}];
TenseurEsh[[1, 1, 1, 1]]=1/(2(1-vm))*(1 - 2vm +(3r^2-1)/(r^2-
1)-(1 - 2vm +(3r^2)/(r^2-1))*CoefG);
TenseurEsh[[2, 2, 2, 2]]=(3/(8(1-vm)))(r^2/(r^2-1))+1/(4(1-
vm)) (1 - 2vm - 9/(4(r^2-1))) CoefG;
TenseurEsh[[3, 3, 3, 3]] = TenseurEsh[[2, 2, 2, 2]];
TenseurEsh[[2, 2, 3, 3]] = 1/(4(1-vm)) (r^2/(2(r^2-1)) -(1 -
2vm + 3/(4(r^2-1))) CoefG);

```

```

TenseurEsh[[3, 3, 2, 2]]= TenseurEsh[[2, 2, 3, 3]];
TenseurEsh[[2, 2, 1, 1]]= -(1/(2(1-vm)))(r^2/(r^2-1))+1/(4(1-vm)) ((3r^2)/(r^2-1)-(1 - 2vm )) CoefG;
TenseurEsh[[3, 3, 1, 1]]=TenseurEsh[[2, 2, 1, 1]];
TenseurEsh[[1, 1, 2, 2]]=- (1/(2(1-vm)))(1 - 2vm +1/(r^2-1))+1/(2(1-vm)) (1 - 2vm +3/(r^2-1)) CoefG;
TenseurEsh[[1, 1, 3, 3]]=TenseurEsh[[1, 1, 2, 2]];
TenseurEsh[[2, 3, 2, 3]]= (1/(4(1-vm)))(r^2/(2(r^2-1)))+(1 - 2vm -3/(4(r^2-1))) CoefG);
TenseurEsh[[3, 2, 3, 2]]=TenseurEsh[[2, 3, 2, 3]];
TenseurEsh[[1, 2, 1, 2]]=(1/(4(1-vm)))(1 - 2vm - (r^2+1)/(r^2-1)-1/2 (1 - 2vm -(3(r^2+1))/(r^2-1)) CoefG);
TenseurEsh[[1, 3, 1, 3]]=TenseurEsh[[3, 2, 3, 2]];
(*Symétrie mineure*)
TenseurEsh[[3, 2, 2, 3]]= TenseurEsh[[2, 3, 2, 3]];
TenseurEsh[[2, 3, 3, 2]]= TenseurEsh[[2, 3, 2, 3]];
TenseurEsh[[3, 2, 3, 2]]= TenseurEsh[[2, 3, 2, 3]];

TenseurEsh[[2, 1, 1, 2]]=TenseurEsh[[1, 2, 1, 2]];
TenseurEsh[[1, 2, 2, 1]]=TenseurEsh[[1, 2, 1, 2]];
TenseurEsh[[2, 1, 2, 1]]=TenseurEsh[[1, 2, 1, 2]];

TenseurEsh[[3, 1, 1, 3]]=TenseurEsh[[1, 3, 1, 3]];
TenseurEsh[[1, 3, 3, 1]]=TenseurEsh[[1, 3, 1, 3]];
TenseurEsh[[3, 1, 3, 1]]=TenseurEsh[[1, 3, 1, 3]];

Print[" Tenseur de concentration d'Eshelby"];
TenseurEsh//MatrixForm
TenseurP =TensorContract[TensorProduct[TenseurEsh, TenseurSm],
{{3,5},{4,6}} ];

Print[" Tenseur de polarisation de Hill pour borne min"];
TenseurP//MatrixForm

(*Détermination du tenseur AEshelby*)
Print["Valeur de AEshelby est donnée par :"]
TenseurA1=TenseurI +
TensorContract[TensorProduct[TenseurP, (TenseurCc-TenseurCm)],
{{3,5},{4,6}}];
TenseurA1//MatrixForm
(*Détermination de la décomposition du Tenseur AEshelby*)
VecteurE3={1,0,0};
TenseurEL=TensorProduct[VecteurE3,VecteurE3,VecteurE3,VecteurE3];

```

```

MatrixiT=IdentityMatrix[3]-TensorProduct[VecteurE3,VecteurE3];
TenseurJT=1/2 TensorProduct[MatrixiT, MatrixiT];
TenseurIT=Table[0, {i,1,3}, {j, 1,3},{k, 1,3},{l, 1,3}];
TenseurIT[[3,3,3,3]]=1;
TenseurIT[[2,2,2,2]]=1;
TenseurIT[[3,2,3,2]]=1/2;
TenseurIT[[3,2,2,3]]=TenseurIT[[3,2,3,2]];
TenseurIT[[2,3,3,2]]=TenseurIT[[3,2,3,2]];
TenseurIT[[2,3,2,3]]=TenseurIT[[3,2,3,2]];
TenseurKE=1/6 TensorProduct[(2
TensorProduct[VecteurE3,VecteurE3]-MatrixiT), (2
TensorProduct[VecteurE3,VecteurE3]-MatrixiT)];
TenseurF= Sqrt[2]/2 TensorProduct[MatrixiT, VecteurE3,
VecteurE3];
TenseurKT= TenseurIT - TenseurJT;
TenseurKL =TenseurK-TenseurKT-TenseurKE;
TenseurFT=TensorTranspose[TenseurF, {3,4,1,2}];
Print["Affichage des tenseurs orthogonaux de décomposition de
A1"];
(*TenseurEL//MatrixForm
MatrixiT//MatrixForm
TenseurJT//MatrixForm
TenseurIT//MatrixForm
TenseurKE//MatrixForm
TenseurKL//MatrixForm
TenseurKT//MatrixForm
TenseurF//MatrixForm
TenseurFT//MatrixForm*)
coef↗=TensorContract[TensorProduct[TenseurEL,TenseurA1],{{1,7}
,{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef↕=TensorContract[TensorProduct[TenseurJT,TenseurA1],{{1,7}
,{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef•=TensorContract[TensorProduct[TenseurFT,TenseurA1],{{1,7},
{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef•p=TensorContract[TensorProduct[TenseurF,TenseurA1],{{1,7},
{3,5},{4,6},{2,8}}];
coefO=1/2
TensorContract[TensorProduct[TenseurKT,TenseurA1],{{1,7},{3,5}
,{4,6},{2,8}}];

```

```

coefOp=1/2
TensorContract[TensorProduct[TenseurKL,TenseurA1],{{1,7},{3,5},
{4,6},{2,8}}];
coef→c=coef↕/(coef→ coef↕-coef.^2);
coef↕c=coef→/(coef→ coef↕-coef.^2);
coef.c=- coef./(coef→ coef↕-coef.^2);
coef.pc=- coef./(coef→ coef↕-coef.^2);
coefOc=1/coefO;
coefOpc=1/coefOp;

Print["Affichage du TenseurA1 et de AEshelby son inverse après
reconstitution"]
TenseurA1 = coef→ TenseurEL + coef↕ TenseurJT + coef.c TenseurF
+ coef.p TenseurFT + coefO TenseurKT + coefOp TenseurKL;
AEshelby = coef→c TenseurEL + coef↕c TenseurJT + coef.c
TenseurF + coef.pc TenseurFT + coefOc TenseurKT + coefOpc
TenseurKL;
TenseurA1//MatrixForm
AEshelby//MatrixForm

(*Tenseur Mori Tanaka*)
TenseurB1=((1-f) TenseurI + f AEshelby);
TenseurB1//MatrixForm

Print["Affichage du tenseur Mori Tanaka"]
coef→3=TensorContract[TensorProduct[TenseurEL,TenseurB1],{{1,7},
{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef↕3=TensorContract[TensorProduct[TenseurJT,TenseurB1],{{1,7},
{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef.c3=TensorContract[TensorProduct[TenseurFT,TenseurB1],{{1,7},
{3,5},{4,6},{2,8}}];
coef.p3=TensorContract[TensorProduct[TenseurF,TenseurB1],{{1,7},
{3,5},{4,6},{2,8}}];
coefO3=1/2
TensorContract[TensorProduct[TenseurKT,TenseurB1],{{1,7},{3,5},
{4,6},{2,8}}];

```

```

coefOp3=1/2
TensorContract[TensorProduct[TenseurKL,TenseurB1],{{1,7},{3,5},
{4,6},{2,8}}];
coef $\rightarrow$ c3=coef $\updownarrow$ 3/(coef $\rightarrow$ 3 coef $\updownarrow$ 3-coef. $3^2$ );
coef $\updownarrow$ c3=coef $\rightarrow$ 3/(coef $\rightarrow$ 3 coef $\updownarrow$ 3-coef. $3^2$ );
coef. $c_3$ =- coef. $3$ /(coef $\rightarrow$ 3 coef $\updownarrow$ 3-coef. $3^2$ );
coef. $p_3$ =- coef. $3$ /(coef $\rightarrow$ 3 coef $\updownarrow$ 3-coef. $3^2$ );
coefOc3=1/coefO3;
coefOpc3=1/coefOp3;
TenseurB1 = coef $\rightarrow$ 3 TenseurEL + coef $\updownarrow$ 3 TenseurJT + coef. $3$ 
TenseurF + coef. $p_3$  TenseurFT + coefO3 TenseurKT + coefOp3
TenseurKL;
TenseurB1Inv = coef $\rightarrow$ c3 TenseurEL + coef $\updownarrow$ c3 TenseurJT + coef. $c_3$ 
TenseurF + coef. $p_3$  TenseurFT + coefOc3 TenseurKT + coefOpc3
TenseurKL;

Print["Affichage du tenseur AMT"]
TenseurAMT=TensorContract[TensorProduct[AEShelby,
TenseurB1Inv], {{3,5},{4,6}} ];
TenseurB1//MatrixForm
TenseurAMT//MatrixForm

Print["Affichage du tenseur MT Unidirectionnel "]
TenseurCMTUD = TenseurCm + TensorContract[TensorProduct[f
(TenseurCc-TenseurCm), TenseurAMT], {{3,5},{4,6}} ];
TenseurCMTUD//MatrixForm

Print["Tenseur d'orientation a2 et détermination de a4"]
a2={{1/3,0,0},{0,1/3,0},{0,0,1/3}};
Id={{1,0,0},{0,1,0},{0,0,1}};
a4=Table[(-
1/35)*(Id[[i,j]]*Id[[k,l]]+Id[[i,k]]*Id[[j,l]]+Id[[i,l]]*Id[[j
,k]])+(1/7)*(a2[[i,j]]*Id[[k,l]]+a2[[i,k]]*Id[[j,l]]+a2[[i,l]]
*Id[[j,k]]+a2[[k,l]]*Id[[i,j]]+a2[[j,l]]*Id[[i,k]]+a2[[j,k]]*I
d[[i,l]]),{i, 1,3},{j,1,3},{k,1,3},{l,1,3}];
a4=TensorProduct[a2, a2];
a2//MatrixForm
a4//MatrixForm

```

```

Print["Calcul des constantes CM Homogénéisé de MT"]

Hsi=TenseurCMTUD;
B1i=Hsi[[1, 1, 1, 1]]+Hsi[[2, 2, 2, 2]]-2*Hsi[[1, 1, 2, 2]]-
4*Hsi[[1, 2, 1, 2]];
B2i=Hsi[[1, 1, 2, 2]]-Hsi[[2, 2, 3, 3]];
B3i=Hsi[[1, 2, 1, 2]]+0.5*(Hsi[[2, 2, 3, 3]]-Hsi[[2, 2, 2,
2]]);
B4i=Hsi[[2, 2, 3, 3]];
B5i=1/2*(Hsi[[2, 2, 2, 2]]-Hsi[[2, 2, 3, 3]]);

Print["Tenseur de rigidité effective du composite : borne
inférieure"]
Ti=Table[B1i*a4[[i, j, k,
l]]+B2i(a2[[i,j]]*Id[[k,l]]+a2[[k,l]]*Id[[i,j]])+B3i*(a2[[i,k]
]*Id[[j,l]]+a2[[i,l]]*Id[[j,k]]+a2[[j,l]]*Id[[i,k]]+a2[[j,k]]*
Id[[i,l]])+B4i*Id[[i,j]]*Id[[k,l]]+B5i*(Id[[i,k]]*Id[[j,l]]+Id
[[i,l]]*Id[[j,k]]),{i,1,3},{j,1,3},{k,1,3},{l,1,3}];
Ti//MatrixForm

Print["Les constantes de LAME lambda et mu sont données par :
"]
Lbdi=Ti[[1, 1, 2, 2]]
Mui=Ti[[1, 2, 1, 2]]
Print["Les caracteristiques mecaniques : E et upsilon sont :
"]
Myi=Mui*(3*Lbdi+2*Mui)/(Lbdi+Mui)
pi=((1/2)*Lbdi)/(Lbdi+Mui)

```